DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

Recurso - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - versão A

8 de fevereiro de 2023 - 13 horas - duração: 120 minutos

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. (1,0 val.) Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem, os limites das sucessões de termos reais

$$a_n = \frac{3n!}{n^n + 2n!} \qquad \text{e} \qquad b_n = \left(\frac{n}{2+n}\right)^{n^2}$$

2. (2,5 val.) Considere a sucessão de termos positivos definida por

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{4} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que u_n é uma sucessão decrescente.

(ii) A sucessão u_n é uma sucessão convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o seu limite.

(iii) Seja U, o conjunto dos termos da sucessão u_n. Indique, caso existam, o supremo, infimo, máximo e minimo de U. Justifique.

3. (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln((x+1)^2)}, & \text{se } x > 0; \\ \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determine os limites laterais de f em 0 e conclua se a função f é prolongável por continuidade em $x = 0$. Justifique.

4. (0,5 val.) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e tal que $g(0) < 0$. Analise se a equação

$$g(x) = 0$$

tem pelo menos duas soluções reais.

5. **(MAP 2)** (2,5 val.) Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

(i) **(MAP 2)** Defina a função derivada e determine, caso existam, os intervalos de monotonia e extremos relativos de h em $\mathbb{R}$.

(ii) **(MAP 2)** Escreva a fórmula de Taylor com o polinómio de Taylor de $2^{\underline{o}}$ grau em potências de x associada à função h em $[-1, 1]$.

6. **(MAP 2)** (2,0 val.) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)(\mathbf{MAP2})\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x+e^{3x}-1}, \qquad (ii)(\mathbf{MAP2})\ \lim_{x\to +0}(\tan(x))^x\ .$$

7. **(MAP 2)** (0,5 val.) Seja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\varphi(0)=0$ e $p\in\mathbb{N}$. Mostre que se $|\varphi'(x)|<x^p$, para $x>0$, então $|\varphi(x)|<x^{p+1}$.

8. **(MAP 2)** (2,5 val.) Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$(i)(\mathbf{MAP2})\ \frac{e^x}{4+e^{2x}} \quad , \qquad (ii)(\mathbf{MAP2})\ \frac{3x^2+x+4}{(x+1)^2(x-2)} \quad .$$

9. (1,0 val.) Determine o valor do integral:

$$i)\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x\, dx$$

10. (1,0 val.) Seja A a região limitada pelas linhas de equação:

$$y=4-x^2 \qquad \text{e} \qquad y=|x|-2\,.$$

Esboce graficamente a região A e calcule a sua área.

11. (2,0 val.) Seja a função $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ uma função contínua e positiva

$$F(x)=\int_1^{\sqrt[3]{x}}\frac{t^3}{f(t)}\,dt\ , \qquad x\in\mathbb{R}^+\,.$$

i) Defina a função derivada de F.

ii) Determine o valor de $F(8)$ quando $f(t)=2\sqrt{1+t^2}$.

12. (2,0 val.) Analise a natureza das as séries, e em caso de convergência, determine a soma de uma delas.

$$i)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n(n+2)}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\,.$$

13. (1,0 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)}\,.$$

Determine para que valores de $x\in\mathbb{R}$ a série converge absolutamente, converge simplesmente ou é uma série divergente.

14. (0,5 val.) Sabendo que a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ é uma série convergente, mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{na_n}{3n+5}$ é convergente.