11. i) Sendo f contínua e positiva em $\mathbb{R}^+$

a função $\frac{t^3}{f(t)}$ é contínua e positiva para $t \in \mathbb{R}^+$

e a função $G(x) = \int_1^x \frac{t^3}{f(t)} dt$ é

diferenciável do teorema fundamental do cálculo

sendo F igualmente diferenciável, resultante

da composição de funções diferenciáveis, e

$$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{x}{f(\sqrt[3]{x})}$$

ii) $$F(8) = \int_1^2 \frac{t^3}{2\sqrt{1+t^2}} dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\sqrt{1+t^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(t\sqrt{1+t^2}\right) dt = 2\sqrt{5} - \sqrt{2} - \left[\frac{(1+t^2)^{3/2}}{3}\right]_1^2$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{2} - \frac{5^{3/2}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\left(P\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} \overset{P.P.P}{=} t^2\sqrt{1+t^2} - P\,2t\sqrt{1+t^2} = t^2\sqrt{1+t^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+t^2)^3}\right)$$

6