5 ii) A função h é pelo menos 2 vezes diferenciável em 0, assim a fórmula de Taylor para a função h de 2ª ordem e em potências de x é

$$h(x) = P_2(x) + R_2(x) \quad , \quad x \in [-1,1]$$

sendo o polinómio de Taylor, $P_2(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2$

e o resto $R_2(x)$ verifica: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$

$h'(0) = 1$ e $h(0)$, $h'(0)$ são nulos.

6 i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + e^{3x} - 1} \overset{\left(\frac{0}{0} \text{ ind.}\right)}{=} 1/4$, da regra de Cauchy

uma vez que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x + e^{3x} - 1)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1 + 3e^{3x}} = \frac{1}{4}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)^x \overset{(0^0 \text{ ind.})}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(\tan x)} = e^0 = 1$, da R. de Cauchy

uma vez que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\tan x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= -\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} \cdot \left(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x}\right)^{-1} = 0$$

7. Seja $x > 0$. φ contínua em $[0,x]$ e diferenciável em $]0,x[$

Do teorema de Lagrange existe $c \in]0,x[$ tal que

$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$, ou seja $\varphi(x) = \varphi'(c) . x$. Como $|\varphi'(c)| < c^p < x^p$

tem-se que $|\varphi(x)| = |\varphi'(c) . x| < x^p . x = x^{p+1}$.

4