CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1. Conceitos básicos e revisão de lógica

O objectivo desta secção é relembrar alguns conceitos que são usados frequentemente em Matemática. Sem eles, a mera compreensão do que nos é apresentado torna-se complicada.

Proposições. Uma proposição (ou asserção, afirmação) é algo que só pode ter dois valores lógicos: verdadeiro ou falso.

Dadas duas proposições (que iremos designar por A e B), podemos construir várias novas proposições:

- Negação $\sim A$: é a afirmação "A é falso" ou "Não A". É verdadeira se A for falsa e falsa se A for verdadeira;
- Conjunção $A \wedge B$: em linguagem corrente, é a asserção "A e B". Esta nova afirmação só é verdadeira quando tanto A como B forem verdadeiras.
- Disjunção $A \vee B$: corresponde à asserção "A ou B". A única forma de esta asserção ser falsa é se tanto A como B forem falsas.
- Implicação $A \Rightarrow B$: significa "A implica B" (ou então: "sempre que A é verdade, B também é"). Para esta nova proposição ser falsa, é preciso que A seja verdadeira mas B seja falsa.

  Na implicação $A \Rightarrow B$, dizemos que A é o antecedente e B é o consequente.

  Além disso, dizemos que A é uma condição suficiente para B (basta que A seja verdade para B também o ser). Por outro lado, B é uma condição necessária para A (se B não for verdade, A também não pode ser - ou então a implicação seria falsa).
- Equivalência $A \Leftrightarrow B$: é uma forma simplificada de escrever que $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$. Em linguagem corrente, corresponde a "A é verdadeira se e só se B for verdadeira". Usa-se para dizer que as duas afirmações são equivalentes.

Exemplo 1.1. (Construção de novas proposições).

A : "A Terra é plana" - Falso;

B : "Existe sal nos oceanos" - Verdadeiro;

$\sim A$: "A Terra não é plana" - Verdadeiro;

$A \wedge B$: "A Terra é plana e existe sal nos oceanos" - Falso, porque uma das afirmações (neste caso, A) é falsa.

$A \vee B$: "A Terra é plana ou existe sal nos oceanos" - Verdadeiro, porque uma das afirmações é verdadeira.

$A \Rightarrow B$: "Se a Terra é plana, existe sal nos oceanos" - Verdadeiro. Neste caso, como o antecedente A é falso, a implicação é sempre verdadeira (nem importa se B é verdadeira ou não).

$B \Rightarrow A$: "Se existe sal nos oceanos, a Terra é plana" - Falso. Como o antecedente B é verdadeiro, para a implicação ser verdadeira, a Terra tinha de ser plana, o que é falso.

$A \Leftrightarrow B$: "A Terra é plana se e só se existe sal nos oceanos" - Falso, porque as duas afirmações têm valores lógicos diferentes.

É importante saber a negação destas novas proposições:

- $\sim(\sim A)$ é o mesmo que A: $\sim(\sim A) \Leftrightarrow A$;
- $\sim(A \wedge B)$ é dizer que a conjunção é falsa. Para isso, uma das afirmações A ou B tem de ser falsa, ou seja, $\sim A$ é verdade ou $\sim B$ é verdade. Matematicamente,

$$\sim(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim A \vee \sim B).$$

- $\sim (A \vee B)$ é dizer que a disjunção é falsa. Tal só acontece quando A for falsa e B também, ou seja, quando $\sim A$ for verdadeira e $\sim B$ também.
$$\sim (A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim A \wedge \sim B).$$
Estas regras de negação da conjunção e da disjunção são por vezes chamadas de Leis de De Morgan.
- $\sim (A \Rightarrow B)$ é dizer que a implicação é falsa, ou seja, A é verdadeira e B é falsa.
$$\sim (A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (A \wedge \sim B)$$

Exemplo 1.2. (Negações).
A: "Existem duas pessoas com alturas diferentes."
B: "Todos os animais são da mesma espécie."
$\sim A$: "Não existem pessoas com alturas diferentes."
$\sim B$: "Nem todos os animais são da mesma espécie."
$A \wedge B$: "Existem duas pessoas com alturas diferentes e todos os animais são da mesma espécie."
$\sim (A \wedge B)$: "Não existem pessoas com alturas diferentes ou nem todos os animais são da mesma espécie."
$A \vee B$: "Existem duas pessoas com alturas diferentes ou todos os animais são da mesma espécie."
$\sim (A \vee B)$: "Não existem pessoas com alturas diferentes e nem todos os animais são da mesma espécie."

Dada uma implicação $A \Rightarrow B$, chamamos de implicação recíproca à asserção $B \Rightarrow A$. A implicação $\sim B \Rightarrow \sim A$ é chamada de contrarecíproco. Na verdade, o contrarecíproco é equivalente à implicação original (simplesmente está reescrita de forma diferente):
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A).$$

Em Matemática, partimos de alguns pressupostos básicos (chamados axiomas) e, a partir deles, tentamos descobrir as implicações desses pressupostos. Normalmente, um resultado matemático é algo da forma

"Se se verificarem (HIPÓTESES), então (CONCLUSÃO)."

que não é mais do que dizer que (HIPÓTESES) $\Rightarrow$ (CONCLUSÃO). Uma demonstração de um resultado matemático é uma dedução lógica desta implicação, partindo das hipóteses até chegar à conclusão pretendida, e que normalmente envolve vários passos.

Exemplo 1.3. "Se x é um número natural, então $x^2 \geq x$."
Demonstração: Se x é um número natural, então $x \geq 1$. Multiplicando em ambos os lados por x, a desigualdade permanece válida, porque $x > 0$. Logo $x \times x \geq 1 \times x$, ou seja, $x^2 \geq x$. $\square$

Existem várias denominações para um resultado matemático:
- Teorema: é um resultado de uma importância destacada;
- Proposição: um resultado de menor importância;
- Lema: é por norma um resultado cuja utilidade é ser usado numa demonstração de uma proposição ou de um teorema (só por si não tem grande interesse);
- Corolário: é uma consequência directa de um teorema ou proposição. Normalmente é um caso particular que tem muita utilidade.

Quantificadores. Existem dois símbolos usados frequentemente em Matemática aos quais se dá o nome de quantificador.

O quantificador universal $\forall$ é usado quando queremos dizer que uma dada propriedade $A(x)$ é válida para todos os elementos x de um dado conjunto C. Formalmente, escreve-se
$$\forall\ x \in C,\ A(x)$$

Em linguagem corrente, quando aparece um quantificador universal, devemos ler como "para qualquer...", "para cada...", "para todo o...", usando a que nos fizer mais sentido.

Exemplo 1.4. (Quantificador universal)

- Vamos escrever a asserção "Todos os números naturais são positivos." usando o quantificador universal. Esta afirmação diz que a propriedade "ser positivo" é válida para todos os números naturais. Neste caso $C = \mathbb{N}$ e $A(x) =$ "$x > 0$" e portanto escreve-se
$$\forall\, x \in \mathbb{N},\ x > 0.$$
- "Dados quaisquer dois números inteiros, o seu produto é positivo.": neste caso, temos uma propriedade que é válida para todo o par x, y de números inteiros. Escrevemos então
$$\forall\, x \in \mathbb{Z}\ \forall\, y \in \mathbb{Z},\ xy > 0.$$
ou, de forma abreviada,
$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ xy > 0.$$
(note-se que esta afirmação é falsa).
- Traduzindo por palavras a asserção
$$\forall x \in \{1, 2, 3, 4\},\ x^2 < 0,$$
lemos "Para qualquer $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x^2 < 0$".
- A asserção
$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{N},\ z = 0 \Rightarrow xyz = 0$$
lê-se como "Para todo o $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $z = 0$, então $xyz = 0$".

O quantificador existencial $\exists$ é usado quando queremos dizer que existe um elemento do conjunto C que verifica a propriedade $A(x)$. Formalmente,
$$\exists x \in C :\ A(x)$$
Os dois pontos ":" leem-se "tal que". Quando aparece um quantificador existencial, devemos lê-lo como "existe..." ou "para algum...".

Exemplo 1.5. (Quantificador existencial)

- Vamos escrever a asserção "Existe um número natural que é negativo." usando o quantificador existencial. Esta afirmação diz que a propriedade "ser negativo" é válida para algum número natural. Neste caso $C = \mathbb{N}$ e $A(x) =$ "$x < 0$" e portanto escreve-se
$$\exists\, x \in \mathbb{N} :\ x < 0.$$
(note-se que a afirmação é falsa).
- "Existem dois números inteiros tais que o seu produto é positivo.": neste caso, temos uma propriedade que é válida para algum par x, y de números inteiros. Escrevemos então
$$\exists\, x \in \mathbb{Z}\ \exists\, y \in \mathbb{Z} :\ xy > 0.$$
ou, de forma abreviada,
$$\exists\, x, y \in \mathbb{Z} :\ xy > 0.$$
(a afirmação é verdadeira: tomando por exemplo $x = 1$, $y = 1$, vemos que $xy = 1$, que é positivo).
- Traduzindo por palavras a asserção
$$\exists x \in \{1, 2, 3, 4\} :\ x^2 < 0,$$
lemos "Existe um $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $x^2 < 0$".
- A asserção
$$\exists\, x, y, z \in \mathbb{N} :\ xyz = 0$$
lê-se como "Para alguns $x, y, z \in \mathbb{N}$, $xyz = 0$" ou "Existem números naturais x, y, z tais que $xyz = 0$.

Os quantificadores aparecem frequentemente em definições e resultados matemáticos. É importante saber lê-los da forma correcta para se conseguir compreender o que está escrito.

Finalmente, vejamos o que acontece quando negamos uma asserção com um quantificador:

- $\sim(\forall x \in C,\ A(x))$ é dizer que não é verdade que a propriedade A seja válida para todos os elementos de C. Isso significa que existe pelo menos um elemento em C para o qual A é falsa, ou seja, $\exists x \in C : \sim A(x)$. Resumindo
$$\sim(\forall x \in C,\ A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in C : \sim A(x)).$$
- $\sim(\exists x \in C :\ A(x))$ é dizer que não há nenhum elemento em C para o qual A seja verdade. Isso significa que, para qualquer elemento x em C, $A(x)$ é falsa, ou seja, $\forall x \in C,\ \sim A(x)$. Logo
$$\sim(\exists x \in C :\ A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in C,\ \sim A(x)).$$

Exemplo 1.6. (Negação de quantificadores)

- A negação de "$\forall x \in \mathbb{N},\ x > 1$" é
$$\exists x \in \mathbb{N} :\ x \leq 1.$$
- A negação de "$\exists x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 2$" é
$$\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 \neq 2.$$

Quanto temos mais que um quantificador, o raciocínio é o mesmo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.7. Consideremos a afirmação "Dado um número inteiro x, existe sempre outro inteiro y que é menor que x". Com quantificadores, a asserção fica:
$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x < y.$$
(note-se que a asserção é verdadeira!). A negação desta asserção é:
$$\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}, x \geq y,$$
que se traduz em: "existe um inteiro x que é maior ou igual que todos os inteiros" (falso).

2. Exercícios

(1) Quais das seguintes afirmações são equivalentes à afirmação $x^2 > y^2$? No caso de não serem equivalentes, verifique também se uma delas implica a outra.

a) $x > y$ b) $x > y > 0$ c) $x < y < 0$ d) $y < x < 0$ e) $|x| > |y|$

(2) Quais das seguintes afirmações são equivalentes à afirmação $x^{-1} < y^{-1}$? No caso de não serem equivalentes verifique, também se uma delas implica a outra.

a) $x > y$ b) $x > y > 0$ c) $0 > x > y$ d) $0 > y > x$ e)$y > 0 > x$

(3) Resolva a equação:
$$\sqrt{1-x} = x - 1\,.$$
Atenção: dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, mas isto não se trata duma equivalência.

(4) Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$
(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x > 0 \ \Leftrightarrow\ x^{-1} > 0$
(d) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x > 1 \ \Leftrightarrow\ x^{-1} < 1$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ y = x^2$

(f) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ y = x^2$

(g) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ y > x$

(h) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$

(5) a) Escreva com quantificadores:
   (i) Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a equação $a + x^2 = 0$ tem solução.
   (ii) Existe um número real maior do que todos os outros.

   b) As afirmações são verdadeiras?

   c) Escreva a negação das afirmações acima (com e sem quantificadores).

(6) Considere a seguinte afirmação:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\ \Rightarrow\ x^2 > 0$$

Indique se a afirmação é verdadeira ou falsa, escreva a sua negação, o recíproco e o contrarecíproco. O recíproco é verdadeiro?

(7) Considere a afirmação seguinte: O quadrado de qualquer número natural ímpar é também ímpar.

   a) Reescreva a afirmação usando apenas símbolos matemáticos.

   b) Mostre que a afirmação é verdadeira.

   c) O que pode concluir de n sabendo que n^2 é par?

3. Soluções dos Exercícios

(1) i. Não. ii. $\Rightarrow$; iii. $\Rightarrow$; iv. Não. v. $\Leftrightarrow$.

(2) i. Não. ii. $\Rightarrow$; iii. $\Rightarrow$; iv. Não. v. $\Rightarrow$.

(3) $x = 1$

(4) a) Falsa; b) Falsa; c) Verdadeira; d) Falsa; e) Verdadeira; f) Falsa; g) Verdadeira; h) Falsa.

(5) a) (i) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : a + x^2 = 0.$
   (ii) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}, x > y.$
   (iii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \neq 0, \dfrac{x}{y} > 1 \Leftrightarrow x > y.$

   b) São todas falsas.

   c) i. $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}, a + x^2 \neq 0$; ii. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$;

(6) Verdadeira. Negação: $\exists x \in \mathbb{R}:\ x \neq 0 \wedge x^2 \leq 0$. Recíproco: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$, que é verdade. Contrarecíproco: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$.

(7) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n$ ímpar $\Rightarrow n^2$ ímpar. b) Sugestão: n é ímpar se e só se $n = 2k - 1$ para algum número natural k; c) Sugestão: contrarecíproco.