

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1º SEMESTRE 2022/23

INFORMAÇÕES GERAIS

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Programa.

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raiz de índice n , funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo). Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em \mathbb{R} .** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em \mathbb{R} .** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Conteúdo

2.1 Classes de funções elementares	3
Função composta	6
Funções Injectivas e suas Inversas	7
Função de Heaviside e Função de Dirichlet	10
Limite de uma função num ponto	11
Exemplos	12
Propriedades do Limite de Funções num Ponto	14
Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada	16
Limite de Funções Compostas	16
Limites Relativos e Laterais	18
Recta Acabada e Indeterminações	19
Limites na recta acabada	19
Operações algébricas na recta acabada e resultados sobre limites	20
Continuidade de Funções Reais de Variável Real	22
Continuidade Lateral	23
Exemplos de Funções contínuas	24
Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas	25
Propriedades Globais das Funções Contínuas	25
Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais	27
Material Extra: Contradomínios de funções contínuas em intervalos e continuidade da função inversa	29
Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy.	30

Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R} com valores em \mathbb{R} , i.e.

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in D \mapsto f(x).$$

O conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ onde a função f está definida é designado por *domínio* de f . O *contradomínio* de f é o conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}.$$

Uma função f diz-se *majorada* (respectivamente *minorada*) se existir $M \in \mathbb{R}$ (respet., $m \in \mathbb{R}$) tal que $f(x) \leq M$ (respet., $f(x) \geq m$) para todo o $x \in D$. Uma função que é simultaneamente majorada e minorada diz-se *limitada*. Note-se, que isto corresponde a dizer que o conjunto $f(D)$ é majorado, minorado ou limitado, respetivamente.

O *gráfico* de uma função f é o subconjunto do plano \mathbb{R}^2 definido por

$$\text{gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

É muitas vezes útil esboçar este conjunto (já o fizemos na verdade para a função módulo). No entanto, isto nem sempre é fácil ou mesmo possível (veja-se o Exemplo 0.23 à frente).

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\text{par se } f(x) = f(-x), \forall x \in D,$$

$$\text{ímpar se } f(x) = -f(-x), \forall x \in D,$$

$$\text{crescente se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D,$$

$$\text{e decrescente se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D.$$

Usamos a terminologia *estritamente crescente* e *estritamente decrescente* quando a última desigualdade das duas linhas anteriores é estrita.

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

periódica com período $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Recorde-se que uma função é par se a sua representação gráfica for simétrica em relação ao eixo Oy ; ímpar se for simétrica em relação à origem; periódica de período T se o gráfico permanecer invariante após uma translação horizontal segundo o vetor $(T, 0)$.

2.1 Classes de funções elementares.

Recordemos alguns exemplos de funções elementares já vossas conhecidas.

Exemplo 0.1. *Funções polinomiais* são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k, \text{ com } c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

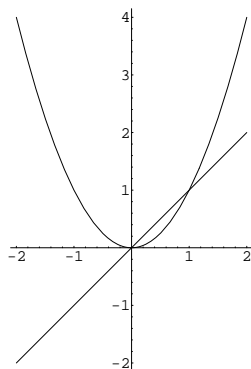


FIGURA 1. Gráfico das funções polinomiais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. A primeira é ímpar, a segunda par.

Veremos que, quando uma função polinomial tem grau ímpar, o seu contradomínio é todo o \mathbb{R} , enquanto quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$. A Figura 1 mostra o gráfico de duas funções polinomiais.

Exemplo 0.2. *Funções racionais* são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e., funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios.}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Um exemplo simples é a função definida por $f(x) = 1/x$, cujo gráfico está representado na Figura 2.

Tanto o seu domínio como contradomínio são $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta função é ímpar, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ (mas não em todo o seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Exemplo 0.3. A *função exponencial*,¹ $f(x) = e^x$, possui domínio $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, portanto é uma função minorada mas não majorada. É, também, estritamente

¹Recorde-se uma das formas de definir esta função. Em primeiro lugar, $e = \lim_n(1 + 1/n)^n > 1$ é o número de Neper. Para um racional da forma p/q , $e^{p/q}$ é definido como sendo $\sqrt[q]{(e^p)}$. Isto permite definir explicitamente a função exponencial (estritamente crescente) nos racionais. A forma de estender o domínio da exponencial ao conjunto \mathbb{R} é a seguinte: dado um $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q}, p/q < x\}$ é majorado e não vazio, logo tem supremo. Assim, para um real $x \in \mathbb{R}$, define-se: $e^x = \sup\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q}, p/q < x\}$.

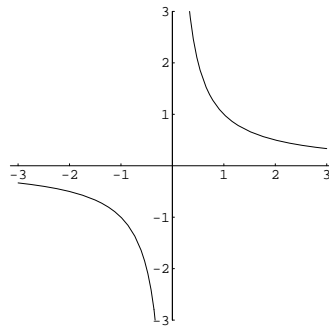


FIGURA 2. Gráfico da função racional $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Recorde-se que o seu gráfico é uma **hipérbole** com assíntotas nos eixos $y = 0$ e $x = 0$.

crescente. O seu gráfico está representado na Figura 3 (juntamente com o gráfico da função logaritmo de base e , de que falaremos à frente).

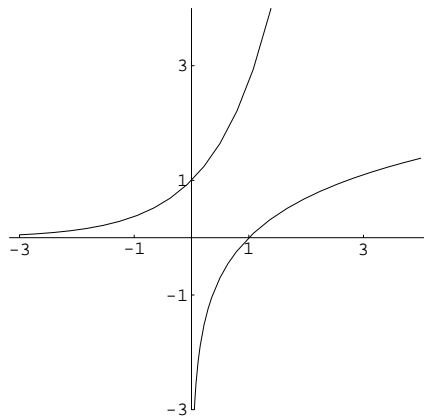


FIGURA 3. Gráfico da função exponencial e da função logaritmo.

Algumas propriedades fundamentais da função exponencial que devem recordar são as seguintes:

- (i) $e^0 = 1$;
- (ii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- (iii) $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 0.4. As funções trigonométricas *seno* e *coseno* são funções cujo o domínio é todo o \mathbb{R} . Os seus gráficos estão representados na Figura 4.

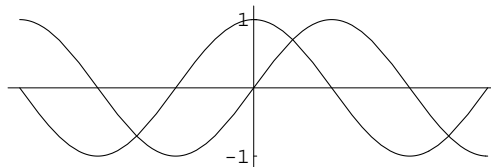


FIGURA 4. Gráfico das funções trigonométricas seno e coseno.

Qualquer uma destas funções tem por contradomínio o intervalo $[-1, 1]$, sendo portanto funções limitadas. A função seno é ímpar e periódica de período 2π , i.e.

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função cosseno é par e também periódica de período 2π , i.e.

$$\operatorname{cos}(x) = \operatorname{cos}(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

As funções seno e cosseno satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$(1) \quad \operatorname{cos}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dito de outra forma, dado $t \in \mathbb{R}$, o ponto $(\operatorname{cos}(t), \operatorname{sen}(t))$ pertence a uma circunferência de centro 0 e de raio 1.

Exemplo 0.5. As funções trigonométricas *tangente* e *cotangente* são definidas a partir das funções seno e cosseno:

$$(2) \quad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} \quad \text{e} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de \mathbb{R} definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{cos}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é \mathbb{R} e o seu gráfico está representado na Figura 5. A função tangente é ímpar e periódica de período π , i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \forall x \in D_{\tan}.$$

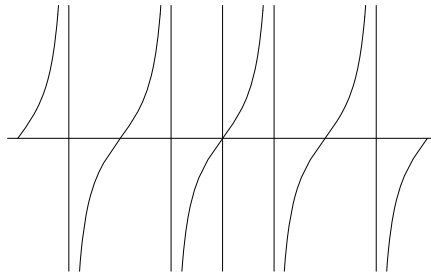


FIGURA 5. Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de \mathbb{R} definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é \mathbb{R} e a representação do seu gráfico fica como exercício. A função cotangente também é ímpar e periódica de período π , i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x + \pi) = \cot(x), \quad \forall x \in D_{\cot}.$$

A partir da identidade trigonométrica (1), obtêm-se também as identidades

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)}, \quad \text{e} \quad 1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)},$$

definidas respectivamente em D_{\tan} e D_{\cot} .

Exemplo 0.6. As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* são definidas a partir da função exponencial:

$$(3) \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico é todo o \mathbb{R} . Os seus gráficos estão representados na Figura 6.

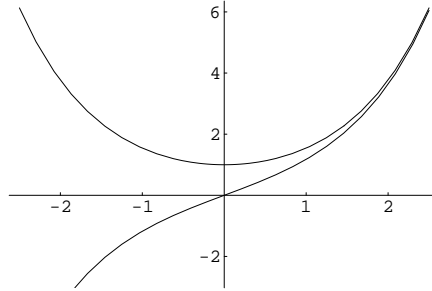


FIGURA 6. Gráfico das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por contradomínio \mathbb{R} . A função cosseno hiperbólico é par e tem por contradomínio o intervalo $[1, +\infty[$. Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$(4) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado $t \in \mathbb{R}$, o ponto $(\cosh(t), \sinh(t))$ pertence à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$; este facto está na origem do nome das funções \sinh e \cosh .

Função composta. Uma forma de produzir novas funções a partir de funções conhecidas é compondo funções.

Definição 0.7. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. A função *composta* $(f \circ g)$ é definida por

$$(f \circ g) : D_{f \circ g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)),$$

onde $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\}$.

Temos assim que

$$D_g \supset D_{f \circ g} \xrightarrow{g} g(D_{f \circ g}) \subset D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \supset (f \circ g)(D_{f \circ g}) \\ x \longmapsto g(x) = y \longmapsto f(y) = f(g(x))$$

i.e., a função composta $f \circ g$ corresponde a aplicar primeiro a função g e de seguida a função f .

Exemplo 0.8. Consideremos as funções $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \text{sen}(y).$$

Temos então que $(f \circ g) : D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \text{sen}(1/x).$$

O seu gráfico está representado na Figura 7.

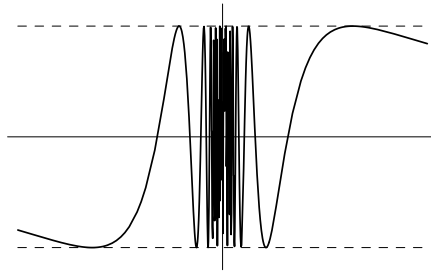


FIGURA 7. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(1/x)$.

Funções Injectivas e suas Inversas.

Definição 0.9. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *injectiva* se, para qualquer valor do contra-domínio $y \in f(D)$, existir *um só* ponto do domínio $x \in D$ tal que $f(x) = y$. De forma equivalente, f é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in D.$$

Exercício 0.10. Mostre que qualquer função estritamente monótona é injectiva.

Nota 0.11. Há funções injectivas que *não são* estritamente monótonas, e mesmo uma função injectiva e contínua pode não ser estritamente monótona (deem um exemplo!). Após estudarmos as propriedades globais de funções contínuas (próxima secção) poderemos mostrar que, no entanto, toda a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e injectiva num intervalo I é monótona e $f(I)$ é um intervalo.

Definição 0.12. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D_f) \subset \mathbb{R}$ uma função injectiva. A sua função *inversa* é definida como a função

$$f^{-1} : f(D_f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow D_f \subset \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x,$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de f tal que $f(x) = y$.

Notem que $D_{f^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} f(D_f)$. Temos assim que

$$D_f \xrightarrow{f} f(D_f) = D_{f^{-1}} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(D_{f^{-1}}) = D_f$$

$$x \longmapsto f(x) = y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in D_{f^{-1}} = f(D_f).$$

Notem que existe uma relação muito simples entre o gráfico de uma função f e o gráfico da sua inversa f^{-1} : se $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de f então $(f(x), x)$ é um ponto do gráfico de f^{-1} . Isto quer dizer que os gráficos de f e de f^{-1} são **simétricos** em relação à recta diagonal $y = x$, como se ilustra nos exemplos seguintes.

Exemplo 0.13. A função polinomial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, não é injectiva em todo o seu domínio \mathbb{R} porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo $[0, +\infty[$ é estritamente crescente, temos que a função

$$f = p|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow p(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$$

$$x \longmapsto x^2$$

é injectiva. Tem assim a inversa f^{-1} definida em \mathbb{R}_0^+ , que é naturalmente a função raiz quadrada:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 8.

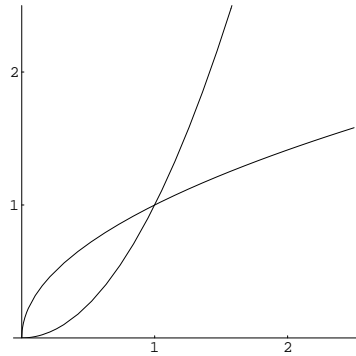


FIGURA 8. Gráfico da função $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo 0.14. A função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente em todo o seu domínio \mathbb{R} e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa f^{-1} definida em todo o \mathbb{R} , que é naturalmente a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 9.

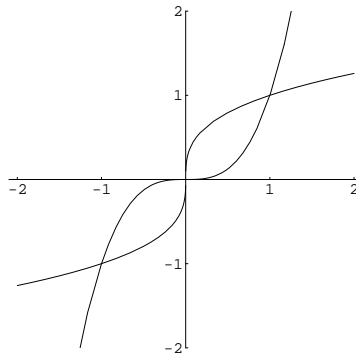


FIGURA 9. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exemplo 0.15. Os Exemplos 0.13 e 0.14 podem ser generalizados da seguinte forma. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que a função polinomial

$$f(x) = x^n \quad \text{é injectiva em} \quad \begin{cases} [0, +\infty[, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

pelo que a função inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{tem domínio} \quad \begin{cases} f([0, +\infty[) = [0, +\infty[, & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 0.16. A função exponencial é estritamente crescente em \mathbb{R} , logo invertível. À sua inversa chamamos *logaritmo* (de base e), $g(x) = \ln x$, que tem domínio \mathbb{R}^+ e contradomínio \mathbb{R} . A função logaritmo não é nem majorada nem minorada, e o seu gráfico encontra-se na Figura 3. Por definição de inversa, vale:

$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0, \quad \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

Além disso, das propriedades vistas para a exponencial,

- (i) $\ln(1) = 0$;
- (ii) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$;
- (iii) $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$.
- (iv) $a^x = e^{x \ln a}$ e $\log_a(x) = (\ln x)/(\ln a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

Exemplo 0.17. Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 2x + 1$. Tem-se

$$f \circ f(x) = x, \quad g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}, \quad h \circ h = 4x + 3,$$

$$h \circ g(x) = 2\sqrt{x} + 1, \quad g \circ h(x) = \sqrt{2x + 1},$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}_0^+$, $D_h = \mathbb{R}$. $D_{h \circ g} = \mathbb{R}_0^+ = D_g$ (porque $D_h = \mathbb{R}$), $D_{g \circ h} = \{x : 2x + 1 \in \mathbb{R}_0^+\} = [-1/2, +\infty[$. Note-se que, em geral, a composição não é uma operação comutativa: vimos neste exemplo um caso em que $h \circ g \neq g \circ h$.

Exercício 0.18. Mostre que o domínio de $f(x) = \ln(4 - x^2)$ é $D_f =]-2, 2[$.

Exemplo 0.19. As funções trigonométricas seno e cosseno, apresentadas no Exemplo 0.4, são periódicas pelo que não são injectivas em todo o seu domínio. De facto, para cada valor y do seu contradomínio $[-1, 1]$ há uma infinidade de pontos do domínio \mathbb{R} que lhe correspondem. Por exemplo,

$$\sin(k\pi) = 0 = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, e para que possamos definir as funções inversas destas funções trigonométricas, temos de restringir os seus domínios a intervalos onde sejam injectivas.

No caso da função seno, consideramos a sua restrição ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco seno*:

$$\begin{aligned} \sin^{-1} &= \arcsen : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ &x \longmapsto \arcsen(x) \end{aligned}$$

Note-se que $\arcsen(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ (uma vez que $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $\pi/4 \in [-\pi/2, \pi/2]$) e $\arcsen(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$ (uma vez que $\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ e $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$).

O gráfico da função \arcsen está representado na Figura 10. Mostre que $\sin(\arcsen x) = x$ e $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$ para qualquer $x \in [-1, 1]$. Por outro lado, verifique que $\arcsen(\sin x) = x$ só é válida se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (porquê?).

Exercício 0.20. Verifique que a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é estritamente decrescente, logo injectiva, e que $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco cosseno*, $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Esboce o seu gráfico.

Note-se que $\arccos(-1) = \pi$ (já que $\cos(\pi) = -1$ e $\pi \in [0, \pi]$), $\arccos(1/2) = \pi/3$ e $\arccos(\cos(-\pi/3)) = \pi/3$. Mostre que

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos(\arccos x) = x$$

Quando é que se pode garantir que $\arccos(\cos x) = x$?

Exemplo 0.21. A função trigonométrica tangente, apresentada no Exemplo 0.5, também é periódica pelo que não é injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ é estritamente crescente, logo injectiva, e $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco tangente*:

$$\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

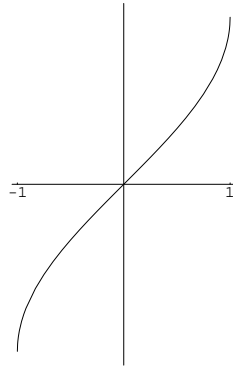


FIGURA 10. Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

$$x \mapsto \arctan(x)$$

O seu gráfico está representado na Figura 11. Note-se que $\arctan(1) = \pi/4$, $\arctan(-1) = -\pi/4$,

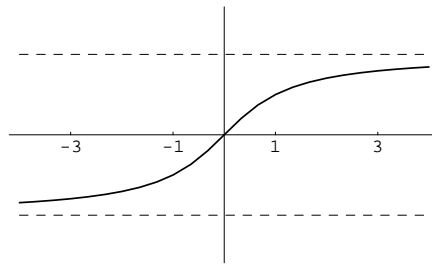


FIGURA 11. Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

$\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ (porquê?).

Função de Heaviside e Função de Dirichlet. Antes de prosseguirmos, vale a pena notar que uma função *não é* necessariamente definida por uma expressão algébrica. Na realidade, uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é apenas uma *regra* que a cada número real $x \in D$ atribui um número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Os próximos dois exemplos são funções que não são definidas por expressões algébricas.

Exemplo 0.22. Consideremos a chamada *função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na Figura 12.

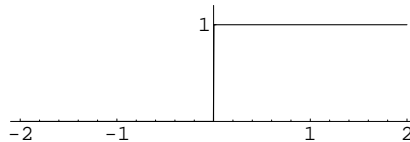


FIGURA 12. Gráfico da função de Heaviside.

Esta função é limitada, crescente, e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$.

Exemplo 0.23. Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função é limitada e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$. Reparem que não é possível esboçar o gráfico desta função da forma usual. Notem que o gráfico está sempre bem definido, e que isto não deve ser confundido com a questão de esboçar o gráfico numa folha de papel ou pedir a um computador para o fazer.

Limite de uma função num ponto.

No ensino secundário, a noção de limite de uma função foi dada da seguinte forma: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ quando:

(5) Sempre que x_n é uma sucessão de termos em D_f tal que $x_n \rightarrow a$, então $f(x_n) \rightarrow b$.

Diz-se que esta é a definição de *limite segundo Heine*. Em CDI1 trabalharemos com uma noção equivalente, a definição de *limite segundo Cauchy* (a equivalência entre as duas definições será tratada na secção de material extra que se encontra no final deste capítulo). A definição que iremos usar tem a vantagem de não requerer a noção de limite de sucessões, e de estar mais próxima de outros raciocínios que faremos ao longo da cadeira. De uma forma ou de outra, note-se que se pode pensar de forma intuitiva que:

(6) Uma função f tem limite b quando x tende para a , se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos, tomando x suficientemente próximo de a .

Com esta *definição informal* é possível tratar exemplos simples de funções e calcular limites elementares. No entanto, ela pode dar lugar a alguma confusão quando pretendemos tratar exemplos mais complicados como, por exemplo, o limite de $f(x) = \text{sen}(1/x)$ quando x tende para 0, ou da função de Dirichlet quando x tende para algum a .

Nota 0.24. Desta noção de limite fica subentendido que é possível aproximar-me de a por pontos no domínio de f , o que motiva a seguinte definição:

Definição 0.25. Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto *aderente* de D se qualquer vizinhança de a tiver pontos de D , ou seja,

$$\forall \delta > 0, \quad D \cap]a - \delta, a + \delta[\neq \emptyset.$$

Exemplo 0.26. Note-se que, se $a \in D$, então a é aderente a D . Por outro lado, se por exemplo $D =]0, 1]$ então 0 é um ponto aderente.

Daqui em diante, sempre que falarmos de limite de uma função num ponto, assumiremos que o ponto é aderente ao domínio dessa função.

Um problema da “definição” (6) está em não ser claro o que se entende por *estar próximo de*. Repare-se que dizer que $f(x)$ está próximo de b (respectivamente, x está próximo de a) deve significar que $|f(x) - b|$ (resp. $|x - a|$) é pequeno. Assim, podemos refinar a nossa “definição” para:

Uma função f tem limite b quando x tende para a , se pudermos fazer $|f(x) - b|$ tão pequeno quanto quisermos, tomando $|x - a|$ suficientemente pequeno.

Mas agora vemos que temos um outro problema: o que é que queremos dizer com os termos *tão pequeno quanto quisermos* e *suficientemente pequeno*? Ao esclarecer o verdadeiro significado destes termos chegamos à definição precisa de limite, que é a seguinte:

Definição 0.27. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com a ponto aderente de D . Dizemos que f tem *limite* b quando x tende para a se para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o x , se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Em notação de quantificadores, podemos escrever esta condição na forma:

$$(7) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Recordando a definição de vizinhança de um ponto (Definição ??), a proposição pode escrever-se da seguinte forma equivalente:

$$(8) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

Notem que tudo o que fizermos daqui em diante dependerá desta definição! Por isso, memorizem-na como se fosse a tabuada o mais rapidamente possível. É uma boa ideia começarem por resolver os seguintes exercícios:

Exercício 0.28. Usando a definição precisa de limite, mostre que:

- (i) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, i.e., para a qual existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- (ii) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função identidade, i.e., $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

A proposição que se segue enuncia um critério útil para o cálculo de alguns limites.

Proposição 0.29. Se existirem $m, M \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$|x - a| < m \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a|$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Dem. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja $\delta = \min\{m, \varepsilon/M\}$. Então

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \quad \square$$

Exemplos. Apresentamos de seguida alguns exemplos de cálculo de limites a partir da definição. Mais adiante, veremos alguns resultados que permitem simplificar imenso o cálculo de limites e evitar recorrer a esta definição. No entanto, é muito importante prestar atenção a estes primeiros exemplos e procurar interiorizar o seu verdadeiro significado.

Exemplo 0.30. Vejamos que, para qualquer número real $a \geq 0$ e natural p , se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p.$$

É um exercício simples [façam-no!] mostrar a igualdade:

$$a^p - b^p = (a - b) \sum_{k=1}^p a^{p-k} b^{k-1}.$$

Se $|x - a| \leq 1$ temos $|x| = |x - a + a| \leq |x - a| + |a| \leq a + 1$, e concluímos que:

$$\begin{aligned} |x^p - a^p| &\leq |x - a| \sum_{k=1}^p |x|^{p-k} |a|^{k-1} \\ &\leq |x - a| \sum_{k=1}^p (a + 1)^{p-k} a^{k-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 0.29 com $m = 1$ e $M = \sum_{k=1}^p (a + 1)^{p-k} a^{k-1}$ para concluir que $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p$.

Exemplo 0.31. Uma análise do círculo trigonométrico e a imparidade e paridade das funções \sin e \cos permitem concluir que, para $|x| < \pi/2$, se tem

$$|\sin x| < |x| \quad \text{e} \quad |1 - \cos x| < x^2.$$

(nesta última, use o Teorema de Pitágoras - veja os detalhes nas páginas 90 e 91 deste livro). Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 0.29 com $m = 1$ e $M = 1$ e vem que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Exercício 0.32. Verifique que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ não satisfaz as condições da Proposição 0.29 no ponto $a = 0$. Use a definição para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$.

Mais Exemplos:

Exemplo 0.33. Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos ver que:

$$\lim_{x \rightarrow a} H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0; \\ 1, & \text{se } a > 0; \\ \text{não existe,} & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Suponhamos primeiro que $a > 0$. É claro que, se tomarmos $|x - a| < a$, então $-a < x - a < a$ e, em particular, $x > 0$, logo:

$$|x - a| < a \Rightarrow |H(x) - 1| = |1 - 1| = 0$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = a$ que se verifica:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |H(x) - 1| < \varepsilon$$

ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 1$. De forma análoga, mostra-se que se $a < 0$ então $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 0$.

Vejamos agora que o $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ não existe. Para obter o significado preciso do que significa não existir o limite, começamos por observar o que significa afirmar que uma função f não tem limite b quando x tende para a . Para isso, basta negarmos a condição na definição de limite:

existe algum $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $\delta > 0$ existe um x que satisfaz $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Se preferirmos, em notação de quantificadores:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Vejamos então que para qualquer número real b a função H não tem limite b quando x tende para 0. Observe que para qualquer $\delta > 0$, se $|x| < \delta$ então temos:

$$\text{se } x < 0 \Rightarrow H(x) = 0 \Rightarrow |H(x) - b| = |b|,$$

$$\text{se } x > 0 \Rightarrow H(x) = 1 \Rightarrow |H(x) - b| = |1 - b|.$$

Portanto, basta tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{2} \max(|b|, |1 - b|)$ para que se verifique:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \wedge |H(x) - b| \geq \varepsilon,$$

donde o limite não é b . Como b era um número real qualquer, concluímos que o limite $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ não existe.

Exercício 0.34. Considere a função de Dirichlet $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} d(x)$ não existe.

Exemplo 0.35. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right).$$

O ponto 0 não pertence ao domínio da função, mas ainda faz sentido falar em $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(1/x)$ (cf. Nota 0.24).

Começamos por observar que $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ e que $\text{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$, para qualquer inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Seja então $x_k^+ = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ e $x_k^- = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$. Se b é um número real qualquer, temos que:

$$|f(x_k^+) - b| = |1 - b|, \quad |f(x_k^-) - b| = |-1 - b| = |1 + b|.$$

Seja então $\varepsilon = \frac{1}{2} \max(|1 - b|, |1 + b|)$. Dado $\delta > 0$, podemos sempre escolher um inteiro k suficientemente grande de forma que $0 < |x_k^\pm| \leq \delta$, logo:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in D : |x| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon,$$

donde o limite de f quando x tende para 0 não é b . Como b era um número real qualquer, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

Exemplo 0.36. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right).$$

O seu gráfico está representado na Figura 13.

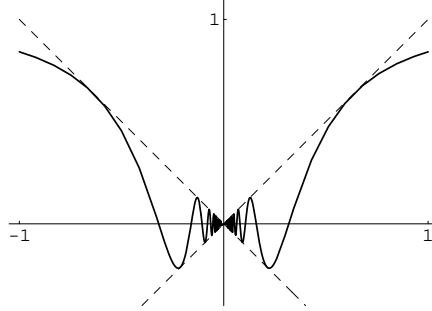


FIGURA 13. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \text{sen}(1/x)$.

Tendo em conta que $|\text{sen}(y)| \leq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$, temos para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que

$$0 \leq \left| x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right| = |x| \cdot \left| \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|.$$

Segue-se que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon$ obtendo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Ou seja, concluímos que:

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Podem encontrar muitos outros exemplos de cálculo de limites através da definição no livro de Spivak (listado na Bibliografia), que vos podem ajudar a interiorizar esta noção.

Propriedades do Limite de Funções num Ponto.

Vamos agora estudar algumas propriedades elementares do limite de funções que nos ajudarão no seu cálculo, sem termos de recorrer à definição.

Teorema 0.37. (Unicidade do Limite) *Seja f uma função e suponha-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b'$. Então $b = b'$.*

Dem. Começamos por escrever, usando a definição de limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b' &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, que $b \neq b'$. Então vamos tomar $\varepsilon = \frac{|b-b'|}{2}$ e, para os δ_1 e δ_2 dados por estas definições, escolhemos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Concluímos que, para todo o x tal que $|x - a| < \delta$, temos:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \wedge |f(x) - b'| < \varepsilon.$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} |b - b'| &= |b - f(x) + f(x) - b'| \\ &< |b - f(x)| + |f(x) - b'| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = |b - b'| \end{aligned}$$

uma contradição. Assim, necessariamente, $b = b'$. \square

Note que se f e g são funções então podemos formar as seguintes novas funções:

- A função $f + g$, dita a *soma* de f e g e a função diferença $f - g$, dita a *diferença* de f e g :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- A função $f \cdot g$, dita o *produto* de f e g :

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

- A função $\frac{f}{g}$, dita o *quociente* de f por g :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Note que o domínio das funções soma, diferença e produto, é a intersecção $D_f \cap D_g$ dos domínios das funções parcelas. O domínio da função quociente $\frac{f}{g}$ é:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Finalmente, dada uma função f e um número real $c \in \mathbb{R}$ podemos considerar a função cf definida por:

$$(cf)(x) = cf(x),$$

cujo domínio é o mesmo que o domínio de f . Também podemos pensar nesta função como o produto da função constante $g(x) = c$ pela função f .

Teorema 0.38. (Limite e Operações Algébricas) *Sejam f e g funções tais que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

Então:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- (iii) se $c \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Dem. Vamos demonstrar em detalhe a propriedade (i). As demonstrações das outras propriedades são análogas e podem ser encontradas no livro de Spivak (listado na Bibliografia).

Começamos por recorrer à definição de limite para escrever:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, se escolhermos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |(f \pm g)(x) - (b \pm c)| = |(f(x) - b) \pm (g(x) - c)| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

o que mostra que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c. \quad \square$$

Exemplo 0.39. Recorrendo a este resultado é muito fácil calcular certos limites sem ter de passar pelo processo doloroso de encontrar os ε e δ correctos. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^4 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)} \quad (\text{pelo Teorema 0.38 (iii)}) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 - \lim_{x \rightarrow a} 3x + \lim_{x \rightarrow a} 2}{\lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 1} \quad (\text{pelo Teorema 0.38 (i)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{a^4 - 3a + 2}{a^2 + 1} \quad (\text{pelo Exemplo 0.30})$$

Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada.

Teorema 0.40. *Sejam f, g e $h : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para qualquer $x \in D$. Temos então que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

Dem. Pela definição de limite podemos escrever (omitimos o domínio para simplificar a apresentação):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - b < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Usando o facto de g estar encaixada entre f e h , obtemos:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) - b \leq h(x) - b < \varepsilon \\ g(x) - b \geq f(x) - b > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b. \quad \square$$

Um caso em que este critério é particularmente útil é quando a função g é da forma $g(x) = u(x)v(x)$ em que $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ - u diz-se um *infinitésimo* - e v é uma função limitada numa vizinhança de a , ou seja existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq v(x) \leq M$, para x numa vizinhança de a . Neste caso, assumindo $u(x) > 0$ (senão consideramos $|u(x)|$), e fazendo $f(x) = mu(x)$, $h(x) = Mu(x)$, temos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Diz-se então que *o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo*. O cálculo do limite do Exemplo 0.36 podia também ser justificado desta forma.

Exemplo 0.41 (Limite Notável). Uma análise simples do círculo trigonométrico (veja-se por exemplo a página 90 - Figura 3.2 deste livro) permite mostrar que, para $|x| < \pi/2$ é válida a relação: $0 < |\sin x| < |x| < |\tan x|$, donde

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Como (recorde o Exemplo 0.31):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1,$$

concluimos pelo princípio do encaixe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Limite de Funções Compostas.

Teorema 0.42. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real, e $(f \circ g) : D_{f \circ g} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sua função composta. Se*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c \in \mathbb{R},$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

Dem. Pela definição de limite (notem a alteração nos nomes das variáveis!):

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \Leftrightarrow \forall \gamma > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma,$$

$$(11) \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 : |y - b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon.$$

Seja então dado $\varepsilon > 0$. Tomamos $\gamma > 0$ tal que (11) é satisfeita e, de seguida, para esta escolha de γ tomamos $\delta > 0$ tal que (10) é satisfeita. Segue-se que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |g(x) - b| < \gamma, && \text{(por (10))} \\ &\Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon, && \text{(por (11)).} \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c. \quad \square$$

Exemplo 0.43 (Mudança de Variável). Suponhamos que pretendemos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$. Observamos que:

$$\frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = f(g(x)),$$

onde $g(x) = x^2$ e $f(y) = \frac{\text{sen } y}{y}$. Como já sabemos que (ver Exemplo 0.41):

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y} = 1,$$

o Teorema 0.42 mostra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = 1.$$

Exemplo 0.44. Dada uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injectiva tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

não é necessariamente verdade que

$$\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = a.$$

Por exemplo, considere a função $f : [0, 1] \cup]2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

Neste caso,

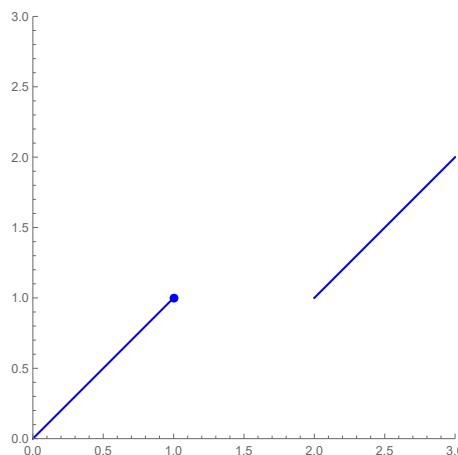


FIGURA 14. O gráfico da função f no Exemplo 0.44.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad \text{mas} \quad \lim_{y \rightarrow 1} f^{-1}(y) \text{ não existe.}$$

Limites Relativos e Laterais.

Definição 0.45. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $A \subset D$ um subconjunto do seu domínio. Diremos que f tem limite b no ponto a relativo ao conjunto A , e escreveremos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b,$$

se a restrição de f ao conjunto A , $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$, tem limite b no ponto a , i.e., se $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$, o que por definição de limite significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in A \text{ e } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Nota 0.46. Como já foi referido na Nota 0.24 para o limite usual, para definir o limite relativo $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x)$ não é necessário que a pertença ao conjunto $A \subset D$, bastando que para todo o $\delta > 0$ exista $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$, ou seja, que a seja aderente a A .

Como é evidente,

se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então existe $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ para todo o A que tem a como ponto aderente.

Isto é especialmente útil para mostrar que não há limite em certas situações: se mostrarmos a existência de dois conjuntos A_1 e A_2 tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A_2}} f(x), \text{ então não existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(veja-se o Exemplo 0.48 à frente).

Nota 0.47. Há dois casos particularmente importantes desta definição de limite relativo, dando origem aos chamados *limites laterais*:

- (i) quando $A = D \cap]a, +\infty[$ temos o chamado limite lateral à direita, ou simplesmente *limite à direita*, que será denotado por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Recorrendo a quantificadores podemos escrever:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in D \text{ e } x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- (ii) quando $A = D \cap]-\infty, a[$ temos o chamado limite lateral à esquerda, ou simplesmente *limite à esquerda*, que será denotado por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Novamente, usando quantificadores podemos escrever:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in D \text{ e } x - a > -\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Exemplo 0.48. Recorde-se a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

A função tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1.$$

logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$.

Exercício 0.49. Para uma função f e $a \in D$ tal que $f(a) = b$, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e é igual a b se, e só se, existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, e são ambos iguais a b (ou seja, se, e só se f é contínua em a).

Recta Acabada e Indeterminações. Até aqui, falámos de limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. O nosso objetivo agora é o de considerar o caso em que a e/ou b possam ser infinito, e perceber em que medida conseguimos generalizar o Teorema 0.38 (Limites e Operações Algébricas) para esta situação. Para isso, teremos de introduzir formalmente o que são $\pm\infty$ (falando da recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$), definir limite para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e como se opera com estes novos símbolos.

Definição 0.50. Designa-se por *recta acabada*, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem mais à frente.

Limites na recta acabada. Queremos agora definir limites na recta acabada, de forma que faça sentido falar nos limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

e ainda que o resultado de um limite possa ser $\pm\infty$. Para isso, recorde-se a definição de *vizinhança de raio* $\varepsilon > 0$ de um ponto $a \in \mathbb{R}$ como sendo o conjunto

$$V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Como já foi observado atrás, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a definição de *limite de uma função* pode ser escrita na forma

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

Se definirmos vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ de $-\infty$ e $+\infty$ por²

$$V_\varepsilon(-\infty) =]-\infty, -1/\varepsilon[\quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty[,$$

a definição (12) continua a fazer sentido na recta acabada

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} ,$$

i.e., para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Passaremos assim a usá-la também neste contexto. Resumindo:

Definição 0.51. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

Exercício 0.52. Verifique que a definição (12) para o limite na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$ tem os seguintes significados:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L > 0 : x \in D \wedge x > L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L > 0 : x \in D \wedge x < -L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, onde $a \in \mathbb{R}$, sse

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L.$$

(iv) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, onde $a \in \mathbb{R}$, sse

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -L.$$

Verifique, ainda, o que significa $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

²A ideia é que a vizinhança diminua quando ε diminui; é isso que está por detrás de se tomar $1/\varepsilon$ nas vizinhanças do infinito.

Exemplo 0.53. Temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

Veja-se a primeira afirmação: dado ε , tem-se (escolhendo $L = 1/\varepsilon$) que

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad x < -\frac{1}{\varepsilon} \implies \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

A demonstração da segunda afirmação fica como exercício (façam-na e confirmem com o vosso professor se a resolução está correta!).

Exemplo 0.54. O conhecimento que temos das funções exponencial e logaritmo, em particular a sua monotonia, permitem-nos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Estes factos serão usados em exemplos e podem (e devem) ser usados na resolução de exercícios. Veja-se a última afirmação: dado $L > 0$, tem-se $\ln(x) < -L \Leftrightarrow 0 < x < e^{-L}$, porque a função logaritmo é crescente (e tem domínio \mathbb{R}^+). Logo, escolhendo $\delta = e^{-L}$,

$$0 < x < \delta \implies \ln(x) < -L.$$

Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites.

Vamos agora definir operações que envolvem $\pm\infty$ de forma a que os teoremas sobre limites de operações algébricas e funções compostas continuem válidos (veja-se a “Nota Importante” mais à frente).

Definição 0.55 (Operações algébricas na reta acabada).

Somas e diferenças. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad \pm\infty + a = \pm\infty$$

Produtos. Para qualquer $\bar{a} \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\bar{a} \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \bar{a} > 0; \\ -\infty, & \text{se } \bar{a} < 0. \end{cases} \quad \bar{a} \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } \bar{a} > 0; \\ +\infty, & \text{se } \bar{a} < 0. \end{cases}$$

Quocientes.

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Recordando que dizemos:

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $g(x) > 0$ numa vizinhança de a
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $g(x) < 0$ numa vizinhança de a ,

temos:

Definição 0.56 (Divisão por 0 e Potenciação). Para qualquer $\bar{a} \in \overline{\mathbb{R}}$, temos o seguinte:

- se $\bar{a} > 0$, então

$$\frac{\bar{a}}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-} = -\infty;$$

- se $\bar{a} < 0$, então

$$\frac{\bar{a}}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-} = +\infty.$$

Além disso,

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq a < 1; \\ +\infty, & \text{se } a > 1; \end{cases} \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}},$$

bem como

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0, & \text{se } b < 0; \\ +\infty, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

As seguintes operações na reta acabada não estão definidas:

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{+\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0.$$

Chamamos a estas expressões indeterminações.

Repare-se que, num certo sentido, todas as indeterminações são equivalentes. Por exemplo:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty \quad \text{e} \quad \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty.$$

Nota importante: Os resultados que estudámos sobre operações algébricas e limites (Teorema 0.38) e limite de funções compostas (Teorema 0.42), continuam a ser válidas para a recta acabada \mathbb{R} , exatamente com o mesmo enunciado, desde que não originem alguma das indeterminações referidas anteriormente. Esta é a justificação para as operações com infinitos que definimos anteriormente.

Nota 0.57 (Retirada do livro de João Paulo Santos, listado na bibliografia). Vamos ver que a indeterminação $\frac{0}{0}$ pode corresponder a qualquer resultado no limite, e até a situações em que não há limite. Tomemos $g(x) = x^3$, que é tal que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Consideremos vários exemplos de funções f com limite 0 na origem:

- Se $f(x) = x^4$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = x$, que converge para 0.
- Se $f(x) = x$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$, que converge para $+\infty$.
- Para qualquer $b \in \mathbb{R}$, podemos tomar $f(x) = bx^3$. Então $\frac{f(x)}{g(x)} = b$ converge para b .
- Se $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x)$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sen}(1/x)$ não existe em 0.

A nota anterior justifica porque chamamos a $\frac{0}{0}$ uma indeterminação. Podem ser dados exemplos do mesmo tipo para todas as outras indeterminações.

Exemplo 0.58. Vimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Usando este facto, pretende-se completar o gráfico da Figura 13 do Exemplo 0.36 calculando o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notem que a propriedade algébrica (ii) do Teorema 0.38 dá neste caso origem a uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, pelo que não pode ser usada para calcular este limite.

Consideremos as funções $g, f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}.$$

Temos então que $(f \circ g) : D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como

$$+\infty \in \overline{D_{f \circ g}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1,$$

podemos concluir pelo Teorema 0.42 que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Na notação do Teorema 0.42, temos que neste exemplo

$$a = +\infty, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

A análise anterior pode ser escrita abreviadamente da seguintes forma:

considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, em que $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$,

temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \sin(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

A Figura 15 apresenta uma versão mais completa do gráfico da Figura 13, tendo já em conta o limite calculado neste exemplo.

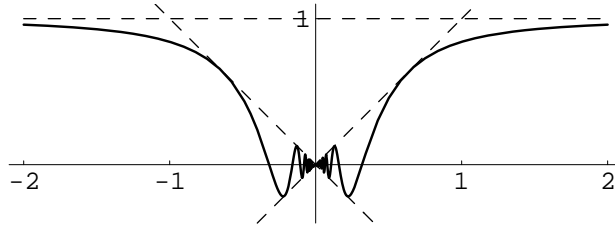


FIGURA 15. Versão mais completa do gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$.

Continuidade de Funções Reais de Variável Real.

Dada uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a relação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

pode não se verificar. De facto, esta igualdade pode falhar por duas razões:

- O limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow a$ não existe (por exemplo, a função $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a = 0$; cf. Exemplo 0.35).
- O limite existe, mas o ponto a não pertence ao domínio D , e portanto não faz sentido sequer falar em $f(a)$ (por exemplo, a função $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a = 0$; cf. Exemplo 0.36).

Este tipo de comportamento pode ser considerado anormal, e por isso convencionou-se um nome para qualificar as funções que se portam bem:

Definição 0.59. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *contínua num ponto* $a \in D$ se existir limite em a . Nesse caso,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

A função f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio D .

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico não apresenta interrupções, saltos ou oscilações. Embora esta ideia intuitiva seja muitas vezes suficiente para decidir se uma função é contínua olhando para o esboço do seu gráfico, há situações em que isso não é de todo claro, e por isso a definição precisa que demos acima é muito importante. Em termos de $\varepsilon - \delta$, uma função f é contínua em $a \in D$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

Teorema 0.60.

- (i) Se f e g são funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em a .

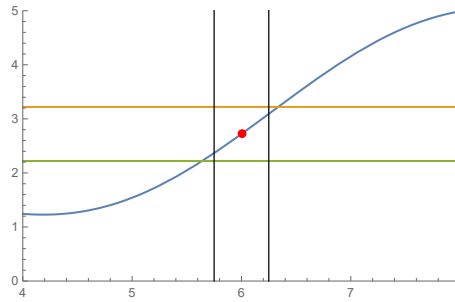


FIGURA 16. Dada a função $f(x) = \text{sen}(x) + x/2$, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x - 6| < 0.25$, então $|f(x) - f(6)| < 0.5$. Por outras palavras, se se fixar $\varepsilon = 0.5$, podemos escolher $\delta = 0.25$.

- (ii) Sejam f e g duas funções. Se $a \in D_{f \circ g}$, g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua em a .

Dem. Consequência imediata da Definição 0.59 e dos Teoremas 0.38 e 0.42. □

Teorema 0.61. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo I . Então a função inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ é contínua.

Dem. Consultem o Spivak (listado na Bibliografia) ou o Teorema 3.3.5 deste livro. Para mostrar este resultado é necessário usar o Teorema de Bolzano, que já conhecem do Ensino Secundário e que recordaremos mais à frente. □

Continuidade Lateral.

A noção de limites laterais introduzida na Nota 0.47 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral*.

Definição 0.62. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

- (i) f é contínua à direita em a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- (ii) f é contínua à esquerda em a se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Teorema 0.63. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. f é contínua em a , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

sse f é contínua à direita e à esquerda em a , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 0.64. A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \neq H(0).$$

Exemplos de Funções contínuas. O que já sabemos sobre limites permite-nos decidir se muitas funções são contínuas ou não.

Exemplo 0.65.

- (a) uma função polinomial $p(x)$ é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.
- (b) qualquer função racional $f = p/q$, com p, q polinómios, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $q(a) \neq 0$;
- (c) a função módulo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$;
- (d) a função de Heaviside, apresentada no Exemplo 0.22, é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$ e descontínua no ponto zero.
- (e) a função de Dirichlet, apresentada no Exemplo 0.23, é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 0.66. Pode mostrar-se, recorrendo à definição de função exponencial e a algumas desigualdades, que esta é uma função contínua (veja-se por exemplo o Teorema 3.4.2 aqui). Como esta é uma função estritamente crescente, então é injetiva. Assim, do Teorema 0.60 concluímos que a função logaritmo é contínua.

Exemplo 0.67. As funções sen, cos, tan e cot são contínuas em todo o seu domínio. De facto, já foi visto que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Usando a identidade para o seno de uma soma e escrevendo x como $x - a + a$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\sin(a) \cos(x - a) + \cos(a) \sin(x - a)) = \sin(a) \cos(0) + \cos(a) \sin(0) = \sin a.$$

A continuidade do cosseno fica como exercício (deve usar a fórmula do cosseno da soma: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$). A continuidade da tangente e cotangente segue imediatamente da sua definição e do facto de quocientes de funções contínuas serem contínuas (no seu domínio).

Exemplo 0.68. Uma vez que as funções sen, cos e tan são contínuas e injetivas nos intervalos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$ e $]-\pi/2, \pi/2[$, do Teorema 0.60 sai que as funções arcsen, arccos e arctan são contínuas no seu domínio.

Exemplo 0.69 (Limite Notável). Vamos mostrar neste exemplo como se chega aos limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Já se sabe que $e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$. Pode mostrar-se que, na verdade, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (isto faz-se por enquadramento, os detalhes podem ser vistos na Proposição 3.4.3 deste livro, por exemplo). Usando uma mudança de variável, tem-se então $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$. Da continuidade e propriedades da função ln, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{1/x} \right] = \ln e = 1$$

Finalmente, de $y = e^x - 1 \iff x = \ln(1+y)$ sai

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Exemplo 0.70. (Prolongamento por Continuidade) Consideremos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, F é numa vizinhança de a o produto/composição de funções contínuas, pelo que é contínua. Por outro lado, recorrendo ao Exemplo 0.36, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 = F(0).$$

Logo, F também é contínua em $a = 0$. Assim, F é contínua em todo o \mathbb{R} .

Esta função F é um exemplo de *prolongamento por continuidade*. Mais precisamente, é o prolongamento por continuidade da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $\forall x \neq 0$, ao ponto zero.

Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas.

Teorema 0.71. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Se $f(a) > g(a)$ então*

$$\exists \delta > 0 : x \in D_f \cap D_g, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Dem. Como f e g são por hipótese contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, sabemos que (omitindo os domínios para facilitar a escrita)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Escolhamos $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$0 < \varepsilon < \frac{f(a) - g(a)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) < g(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > (f(a) - \varepsilon) - (g(a) + \varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > f(a) - g(a) - 2\varepsilon > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da escolha feita para ε . □

Corolário 0.72. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$ com $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Basta usar o Teorema 0.71 com $g(x) = 0$, $\forall x \in D$. □

Teorema 0.73. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Exercício. □

Propriedades Globais das Funções Contínuas.

Nas últimas secções vimos que, quando uma função é contínua num ponto a , podemos obter informação sobre o comportamento local da função, i.e., numa vizinhança de a . Vamos agora ver que, quando uma função é contínua num intervalo $[a, b]$, então podemos obter informação sobre o comportamento global da função, i.e., em todo o intervalo $[a, b]$.

Vamos começar por enunciar três resultados muito importantes, e depois deduzir algumas consequências. A demonstração destes resultados só será feita no fim deste capítulo.

Teorema 0.74. (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja f uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Então, para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Este resultado afirma que uma função contínua f num intervalo $[a, b]$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Geometricamente, isto significa que o gráfico de f intersecta a recta horizontal $y = \alpha$ sempre que α esteja entre $f(a)$ e $f(b)$, como se ilustra na seguinte figura.

Teorema 0.75. *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então f é limitada nesse intervalo, i.e., o contradomínio $f([a, b])$ é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in [a, b]$.*

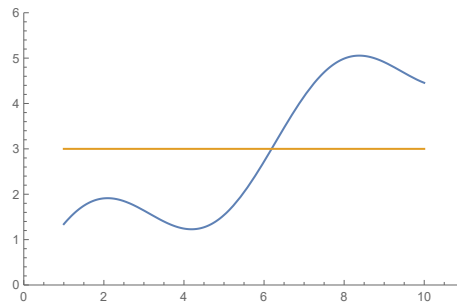


FIGURA 17. O Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto cuja imagem é igual a 3.

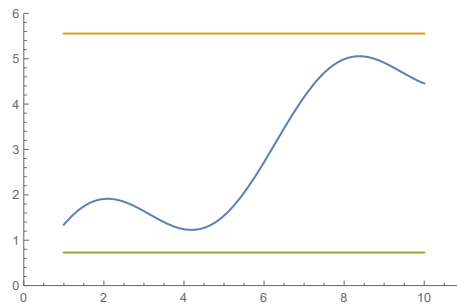


FIGURA 18. O gráfico de uma função contínua entre duas rectas horizontais.

Geometricamente, este resultado diz que o gráfico de f está entre duas rectas horizontais, como na seguinte figura.

Para enunciar o terceiro e último resultado fundamental, vamos introduzir a seguinte notação:

Definição 0.76. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f tem *máximo* (resp. *mínimo*) no conjunto D se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in D$ (resp. $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in D$). Neste caso, c diz-se *ponto de máximo* (resp. *ponto de mínimo*) de f em D , e $f(c)$ diz-se o *máximo* (resp. *mínimo*) de f em D .

Teorema 0.77. (Teorema de Weierstrass) *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então f tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

A figura seguinte ilustra este resultado:

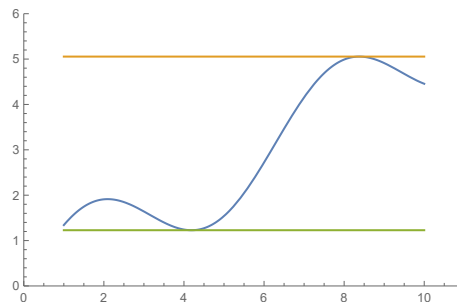


FIGURA 19. O Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo.

Notem que, para qualquer um destes resultados ser válido, a função f tem de ser contínua em *todos* os pontos do intervalo $[a, b]$. Basta a continuidade falhar nalgum ponto para um destes resultados deixar de ser válido, como se ilustra nos exemplos seguintes:

Exemplo 0.78. Se restringirmos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ao intervalo $[-1, 1]$:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

obtemos uma função que é contínua excepto na origem. Temos que $f(-1) = 0$ e $f(1) = 1$, mas a função não assume quaisquer valores α entre 0 e 1, falhando portanto as conclusões do Teorema do Valor Intermédio. Notem que esta função é limitada e tem máximo e mínimo.

Exemplo 0.79. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$ excepto em $x = 0$. Por outro lado, f não é limitada neste intervalo, falhando as conclusões do Teorema 0.75 e do Teorema de Weierstrass.

Este exemplo também mostra que nas hipóteses do Teorema 0.75 e do Teorema de Weierstrass não podemos substituir o intervalo fechado $[a, b]$ pelo intervalo aberto $]a, b[$.

Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais. Vejamos agora algumas consequências e aplicações destes teoremas globais. O Teorema de Bolzano tem o seguinte corolário imediato:

Corolário 0.80. *Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset D$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 0.81. Vejamos como este corolário do Teorema de Bolzano pode ser usado para mostrar que qualquer polinómio do terceiro grau, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } a_3 \neq 0,$$

tem pelo menos um zero em \mathbb{R} , i.e., existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perda de generalidade que $a_3 > 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot a_3 = -\infty,$$

enquanto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot a_3 = +\infty.$$

Logo, existem $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, pelo que o Corolário 0.80 do Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que $p(c) = 0$.

Nota 0.82. O resultado do Exemplo 0.81 generaliza-se facilmente para qualquer polinómio de grau ímpar, mas não para qualquer polinómio de grau par. Por exemplo, o polinómio de segundo grau $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $p(x) = x^2 + 1$ não tem zeros em \mathbb{R} . Recordem que a necessidade de encontrar zeros para este polinómio (i.e., soluções para a equação $x^2 + 1 = 0$) é uma das motivações para a introdução e construção do corpo dos números complexos \mathbb{C} .

Ainda assim, podemos-nos perguntar o que é que os teoremas fundamentais acima nos permitem dizer sobre as soluções de equações polinómicas de grau par. De facto eles permitem-nos, por exemplo, resolver uma questão que já discutimos anteriormente:

Teorema 0.83. *Para todo o $\alpha > 0$ a equação:*

$$x^2 = \alpha,$$

tem uma solução positiva. Será naturalmente designada por $\sqrt{\alpha}$.

Dem. Já sabemos que uma função polinomial é contínua, logo $f(x) = x^2$ é contínua. Dado $\alpha > 0$, existe um real $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$: se $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$; se $\alpha = 1$ podemos tomar qualquer $b > 1$; se $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Assim, a função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) < \alpha < f(b)$, e pelo Teorema de Bolzano concluímos que existe $x \in]0, b[$ tal que $f(x) = x^2 = \alpha$. \square

Exercício 0.84. Use um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema 0.83 para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem:

$$\sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \text{e} \quad \sqrt[n+1]{\alpha} \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dem. do Teorema de Bolzano. Vamos supôr que $f(a) < f(b)$ (o caso $f(a) > f(b)$ é inteiramente análogo) e fixemos um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$. Um número $c \in]a, b[$ que é candidato natural a solução de $f(c) = \alpha$ é o supremo do conjunto

$$C = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

Pelo princípio do supremo, uma vez que C é não vazio, já que $a \in C$, e majorado, já que b é majorante, sabemos que existe $c = \sup C \leq b$. Para provar que $f(c) = \alpha$, provamos separadamente que não pode ocorrer $f(c) > \alpha$ nem $f(c) < \alpha$.

- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) > \alpha$. A função $g(x) = f(x) - \alpha$ é contínua em c e satisfaz $g(c) > 0$. Pelo Corolário 0.72, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo o $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Isto significa que $f(x) > \alpha$ para todo o $x \in]c - \delta, c + \delta[$, pelo que $C \cap]c - \delta, c + \delta[= \emptyset$ que contradiz a propriedade do supremo dada pela Proposição ??
- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) < \alpha$. A função $g(x) = \alpha - f(x)$ é contínua em c e satisfaz $g(c) > 0$ logo, pelo Corolário 0.72, existe $c' > c$ ³ tal que $g(c') > 0$, ou seja $f(c') < \alpha$. Isto significa que $c < c'$ e $c' \in C$. Logo c não poderia ser majorante de C , o que contradiz o facto de $c = \sup C$.

Assim, $c \in [a, b]$ e $f(c) = \alpha$, como queríamos demonstrar. Notem que, de facto, $c \in]a, b[$ pois $f(c) = \alpha \neq f(a), f(b)$. \square

Dem. do Teorema 0.75. De forma análoga à demonstração do Teorema de Bolzano, introduzimos o conjunto:

$$C = \{x \in [a, b] : f \text{ é limitada em } [a, x]\}.$$

Claramente este conjunto é não-vazio pois contém a . Por outro lado, C é um conjunto majorado por b . Pelo Princípio do Supremo temos que existe $\alpha = \sup C$. Vejamos que, de facto, $b = \alpha$:

- $\alpha > a$. Como f é contínua em a , pelo Teorema 0.73, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $[a, a + \delta)$. Portanto, f é limitada em $[a, a + \delta/2]$ donde $\alpha \geq a + \delta/2 > a$.
- $\alpha = b$. Suponhamos, por absurdo, que $a < \alpha < b$. Como f é contínua em $\alpha \in]a, b[$, pelo Teorema 0.73 concluímos que existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Mas então f é limitada em $[a, \alpha - \delta]$ e em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, logo é limitada em $[a, \alpha + \delta/2]$, o que contradiz o facto de que α é o supremo de C .

Assim, temos que $b = \sup C$ e portanto f é limitada em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x < b$.

Isto não mostra ainda que f é limitada em $[a, b]$, porque ainda não sabemos se $b = \sup C \in C$, i.e. se $b = \max C$. Mas basta agora observar que f é contínua em b , logo pelo Teorema 0.73, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $(b - \delta, b]$. Se f é limitada em $[a, b - \delta]$ e em $(b - \delta, b]$ então f é limitada em $[a, b]$, como pretendíamos mostrar. \square

Dem. do Teorema de Weierstrass. Vamos mostrar que f tem máximo. A demonstração que f tem mínimo é inteiramente análoga.

Consideremos o contradomínio de f , i.e. o conjunto dos valores que f toma em $[a, b]$:

$$C = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Este conjunto é obviamente não vazio e, pelo teorema anterior, é limitado. O Princípio do Supremo garante que existe $M = \sup C$. Tudo o que temos a fazer é mostrar que $M \in C$, pois isso significa que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M \geq f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$.

Suponha-se, por absurdo, que $M \neq f(c)$ para todo o $c \in [a, b]$. Então podemos definir a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

³Também sai do Corolário 0.72 que $c < b$, já que sendo $f(b) > \alpha$, haverá uma vizinhança de b onde $f(x) > \alpha$, logo $b \neq \sup C$.

Esta função é contínua, pois é a composta de funções contínuas e o denominador não se anula. Pela propriedade do supremo $M = \sup C$ dada pela Proposição ??, temos que para todo o $\varepsilon > 0$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) > M - \varepsilon$, ou seja,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto mostra que g não é limitada em $[a, b]$, o que contradiz o Teorema 0.75 que mostrámos anteriormente. \square

Material Extra: Contradomínios de funções contínuas em intervalos e continuidade da função inversa. Uma das aplicações importantes do Teorema de Bolzano é permitir-nos caracterizar contradomínios de funções contínuas. De facto, notem que este resultado pode ser escrito na forma seguinte: se I for um intervalo *qualquer* com f contínua em I , e $a, b \in I$ com $f(a) < f(b)$ (por exemplo), então, escrevendo $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$, temos

$$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]) \subset f(I)$$

ou seja, se $f(a), f(b) \in f(I)$, e $f(a) < \alpha < f(b)$, então $\alpha \in f(I)$ ou seja, $f(I)$ é um intervalo. (Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo \Leftrightarrow se $x, y \in A$, com $x < y$, então para qualquer z tal que $x < z < y$ tem-se $z \in A$.)

Corolário 0.85. *Funções contínuas transformam intervalos em intervalos, ou seja, se o domínio é um intervalo I , também a imagem $f(I)$ será um intervalo.*

Em geral, temos sempre que $f(I)$ é um intervalo de extremos r e s ,

$$]r, s[\subset f(I) \subset [r, s]$$

em que $s = \sup\{f(x) : x \in I\} = \sup f(I)$ e $r = \inf\{f(x) : x \in I\} = \inf f(I)$ em $\overline{\mathbb{R}}$. O intervalo será fechado ou aberto nos extremos dependendo de f ter máximo ou mínimo em I . Usando agora o Teorema de Weierstrass, temos também o seguinte:

Corolário 0.86. *Se f é contínua em $I = [a, b]$, intervalo limitado e fechado, então $f(I)$ também é um intervalo limitado e fechado.*

(Os intervalos limitados e fechados dizem-se *compactos* e têm propriedades importantes.) Uma consequência de f contínua num intervalo I então $f(I)$ é também um intervalo, dá-nos a *continuidade da função inversa*, que vimos no Teorema 0.61 (vejam também o Exemplo 0.44). É fácil ver que esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas: podemos ter $f(I)$ intervalo sem que f seja contínua, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ ou } f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}.$$

Mas se f é monótona, temos um critério de continuidade. Isso depende da seguinte propriedade das funções monótonas que deixamos como exercício.

Exercício 0.87. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$ em $\overline{\mathbb{R}}$ para qualquer $a \in D$. (Sug. $f(a^+) = \sup\{f(x) : x < a, x \in D\}$.)

Teorema 0.88. *Se f é estritamente monótona em I e $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua em I .*

Demonstração. Seja $a \in I$, (assumimos a no interior de I , se for um dos extremos prova-se da mesma forma a continuidade lateral). Assumindo f crescente (para decrescente é análogo) temos $f(a^+) \leq f(a) \leq f(a^-)$ e também $f(x) < f(a^-)$, se $x < a$, $f(x) > f(a^+)$, se $x > a$. Se fosse $f(a^+) \neq f(a)$, então $]f(a), f(a^+[$ não estaria na imagem de f e $f(I)$ não seria um intervalo. O mesmo se conclui se $f(a^-) \neq f(a)$. Logo $f(a^+) = f(a) = f(a^-)$ e f é contínua em a . \square

Daqui sai:

Demonstração da Continuidade da Função Inversa. f injectiva e contínua num intervalo $I \Rightarrow f$ é estritamente monótona e f^{-1} também será. Como $f^{-1}(J) = I$ é um intervalo, conclui-se do resultado anterior que f^{-1} é contínua. \square

Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy. Tal como observámos no início do capítulo, no Ensino Secundário a noção de limite aprendida foi aquela segundo Heine – recorde-se (5). Nesta cadeira aprofundámos uma outra noção de limite segundo Cauchy (Definição 0.27). Mostramos de seguida que as noções são equivalentes.

Antes disso, é útil recordar a definição de uma sucessão (x_n) convergir para $a \in \mathbb{R}$: diz-se que $x_n \rightarrow a$ se

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies |x_n - a| < \delta,$$

ou seja, dado $\delta > 0$ existe uma ordem p a partir da qual $|x_n - a| < \delta$.

Teorema 0.89 (Equivalência das definições de limite para $a, b \in \mathbb{R}$). *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a um ponto aderente a D , e $b \in \mathbb{R}$. Temos*

$$\text{definição no sentido de Cauchy} \iff \text{definição no sentido de Heine.}$$

Demonstração. (Cauchy \implies Heine): se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ no sentido de Cauchy e $x_n \rightarrow a$, dado $\varepsilon > 0$, sejam $\delta > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

- $|x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$;
- $n \geq p \implies |x_n - a| < \delta$.

Em conclusão, dado $\varepsilon > 0$ arranjamós uma ordem p tal que para $n \geq p$ temos $|f(x_n) - b| < \varepsilon$; conclui-se assim que $f(x_n) \rightarrow b$.

Reciprocamente, vemos que (Não Cauchy \implies Não Heine): se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ segundo Cauchy, existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ encontramos x com $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| > \varepsilon$. Tomamos $\delta = 1/n$ e $x = x_n$ e temos

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |f(x_n) - b| > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja construímos uma sucessão (x_n) tal que

$$x_n \rightarrow a \quad \text{e} \quad f(x_n) \not\rightarrow b,$$

o que implica que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ segundo Heine. □