CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1^{o} SEMESTRE 2022/23

Informações Gerais

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Programa.

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raíz de índice n, funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo).Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$.** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em $\mathbb{R}$.** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

1. Cálculo Diferencial

Derivada de Uma Função num Ponto. A noção de *derivada* é a primeira das duas noções fundamentais do Cálculo que vamos estudar. A outra é a noção de *integral* que será estudada mais tarde.

A noção de derivada de uma função pode ser motivada das mais variadas formas. Por exemplo, a origem do conceito de derivada está ligada à Física e alguns dos resultados que vamos estudar tem interpretações físicas imediatas, recorrendo a conceitos como o de velocidade e aceleração. No entanto, preferimos recorrer a um problema geométrico simples, que permite mostrar que a derivada é de facto um conceito matemático preciso e importante em muitas aplicações.

A questão que colocamos é a seguinte: Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de f num vizinhança do ponto $(a, f(a))$? A resposta a esta questão é, naturalmente, a recta *tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Surge então o problema de saber como calcular a equação dessa recta tangente.

Denotando por (x, y) as coordenadas de um ponto arbitrário do plano $\mathbb{R}^2$, a equação de qualquer recta não vertical que passe no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$(y - f(a)) = m \cdot (x - a)\,,$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é arbitrário e representa o *declive* da recta determinada pela equação. A resolução do nosso problema passa pois por calcular *o declive da recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto* $(a, f(a))$.

Esse cálculo pode ser feito com base na noção de limite. De facto, a recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a))$ pode ser obtida como o "limite" de rectas secantes ao mesmo gráfico, como ilustra a Figura 1.

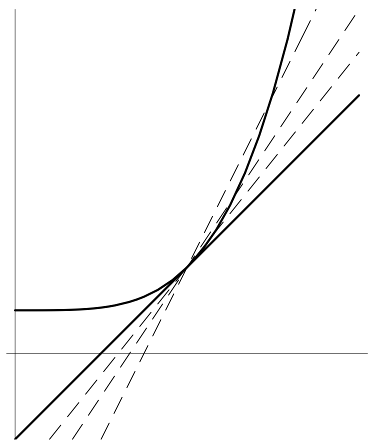

Figura 1. A recta tangente como limite de rectas secantes.

Assim, para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$. É uma recta secante ao gráfico de f e o seu declive é dado por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$. Somos assim levados a colocar a seguinte definição formal:

Definição 1.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que *f é diferenciável no ponto $a \in D$ com derivada $f'(a)$* se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Antes ainda de vermos alguns exemplos, fazemos três comentários a esta definição:

O primeiro comentário é que a notação para a derivada, $f'(a)$, sugere que devemos pensar na derivada como uma função. De facto assim é: a cada a em que o limite na Definição 1.1 existe associamos o número real $f'(a)$. Assim, o domínio $D_{f'}$ da função derivada é um subconjunto do domínio de f.

O segundo comentário tem que ver com a interpretação física de derivada. Se $x(t)$ representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo t ao longo de uma reta, então a razão:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

representa a "velocidade média" do objecto no intervalo de tempo $[t, t+h]$. Podemos pois pensar na derivada

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

como a *velocidade instantânea* do objecto no instante t. Assim, podemos dizer que a velocidade instantânea do objecto é a taxa de variação da posição.

Notem, ainda, que a noção de taxa de variação faz sentido em qualquer situação em que uma quantidade varia. É por isso que a noção de derivada é tão importante quer em Matemática quer nas aplicações.

O terceiro comentário é que, embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a Definição 1.1 de derivada de uma função, nós ainda não temos uma definição matemática precisa de recta tangente. Mas podemos agora usar a noção de derivada para dar uma definição precisa:

Definição 1.2. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A *recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$* é a recta definida no plano pela equação

$$(y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a). \tag{1}$$

Estamos a aproximar $f'(a)$ por $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, e o erro nessa aproximação é dado por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \ \to \ 0, \ x \to a.$$

Rescrevendo, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_a(x), \qquad \text{para } R_a(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)(x - a).$$

Note-se que $R_a(x) \to 0$ quando $x \to a$; na verdade, vai mais depressa para 0 do que o polinómio de grau 1 dado por $x - a$, já que:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{x - a} \to 0.$$

Neste sentido, podemos escrever

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{quando} \quad x \to a.$$

Intuitivamente, uma função é diferenciável em a se, "perto" de a, for aproximadamente *linear*. **Ao acto de subtituir $f(x)$ por $f(a) + f'(a)(x - a)$ chama-se *linearização* (perto de a), e é algo que farão em muitas outras cadeiras aplicadas do curso!**

Exemplos.

Exemplo 1.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha x + \beta) - (\alpha a + \beta)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Exemplo 1.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Usando

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e o facto do cosseno ser uma função contínua.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $f'(x) = \cos x$.

Exercício 1.5. Mostre que a derivada da função $g(x) = \cos x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $g'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Exemplo 1.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Concluímos assim que a derivada da função $f(x) = e^x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é ela própria: $f'(x) = e^x$.

Exemplo 1.7. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \ln x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}.$$

Considerando a mudança de variável

$$y = \frac{h}{x}, \quad \text{em que} \quad h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0,$$

temos então que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x},$$

onde na última igualdade usámos novamente o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \ln x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^+$ e que a função derivada é $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Uma outra notação para derivada é a *notação de Leibniz*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = f'(x).$$

Por exemplo, nesta notação, temos as seguintes derivadas:

$$\frac{d}{dx}(\alpha x + \beta) = \alpha \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+); \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R});$$

Quando a variável independente é o tempo, por exemplo no caso de uma função $f(t)$, $x(t)$ ou $y(t)$, é comum usar um ponto por cima da função para representar uma derivada:

$$\dot{f}(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t).$$

Derivadas Laterais.

Definição 1.8. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f tem *derivada lateral à direita* em a se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

(ii) f tem *derivada lateral à esquerda* em a se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

Teorema 1.9. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. A função f é diferenciável no ponto a sse f tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$.*

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 1.10. A função módulo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x < 0, \\ x\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 2, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

De facto,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{e}$$

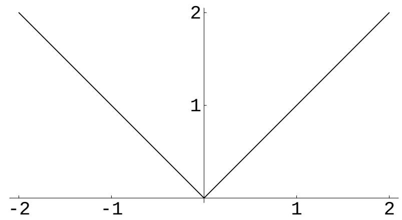

Figura 2. Gráfico da função módulo.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1\,.$$

Logo $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$, pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

Exemplo 1.11. $f(x) = \sqrt{x}$ em $a = 0$: neste caso a derivada à esquerda não está definida e à direita temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Como o limite não existe em $\mathbb{R}$, f não é diferenciável em 0. Verifique que também a função $\sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $a = 0$.

Exemplo 1.12. Função de Heaviside (Exemplo **??**) em $x = 0$:

$$H'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0,$$

$$H'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Logo, H não é diferenciável em 0. Notem que

$$H'_e(0) \neq \lim_{x\to 0^-} H'(x) = 0,$$

já que $H'(x) = 0$, $x \neq 0$.

Diferenciabilidade e Continuidade. Deve ser claro que uma função que possui derivada é "mais bem comportada" que uma função que é apenas contínua. Esta ideia é tornada precisa pelo:

Teorema 1.13. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $a \in D$ então f é contínua em a.*

Dem. Considermos a função $\rho : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,\ \forall\, x \in D \setminus \{a\}\ .$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto $a \in D$, sabemos que

$$\lim_{x\to a} \rho(x) = f'(a) \in \mathbb{R}\,.$$

Por outro lado,

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\rho(x)\,,\ \forall\, x \in D\setminus\{a\}\ .$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= f(a) + \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\rho(x)\\ &= f(a) + 0\cdot f'(a) = f(a)\,,\end{aligned}$$

pelo que f é contínua em $a \in D$. $\square$

Nota 1.14. O Teorema 1.13 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ contínua em } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função módulo do Exemplo 1.10 é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Por outro lado, o Teorema 1.13 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ não é contínua em } a \Rightarrow f \text{ não é diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo **??**) pelo que também não é diferenciável nesse ponto (note-se que nestes casos não é preciso calcular derivadas laterais como fizemos anteriormente).

Regras Algébricas de Derivação.

Teorema 1.15. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são diferenciáveis no ponto a, sendo as suas derivadas dadas por:*

$$\begin{aligned}
(c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \\
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) && \text{(Regra de Leibniz)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

Nota 1.16. As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema dizem-nos que a derivação é uma operação *linear*.

Dem. Provaremos apenas a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(g(a+h) \cdot \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} g(a+h) \right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)\,,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou naturalmente o facto de f e g serem diferenciáveis em a, bem como o facto de g ser também contínua em a (Teorema 1.13). □

Exemplo 1.17. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mostremos pelo método de indução que a função $f(x) = x^n$ possui derivada em todos os $x \in \mathbb{R}$ e que a sua função derivada é: $f'(x) = n\,x^{n-1}$:

- Para $n = 1$ temos $(x^1)' = x' = 1$ (é um caso particular do Exemplo 1.3).
- Supondo agora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, queremos provar que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Ora isso é verdade, já que:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^{n+1},$$

  onde na segunda igualdade usámos a fórmula para a derivada do produto, e na terceira igualdade usámos a hipótese de indução.

Exemplo 1.18. É possível mostrar que, para qualquer expoente $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = x^\alpha$ possui derivada em todos os ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e que a sua função derivada é $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Voltaremos a este ponto após revermos a derivação da função composta.

Exemplo 1.19. As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{cf. Exemplo \textbf{??}}).$$

Usando a derivada da função exponencial (Exemplo 1.6) e a fórmula do Teorema 1.15 para a derivada do quociente, temos que

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{(1)' \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}\,.$$

Usando também a linearidade da derivação, especificada pelas duas primeiras regras algébricas do Teorema 1.15, obtemos o seguinte resultado para as derivadas das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,; \tag{3}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x\,. \tag{4}$$

Exemplo 1.20. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tangente, i.e. definida por

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,, \ \forall x \in D = D_{\tan} \ (\text{cf. Exemplo \textbf{??}}).$$

Usando a fórmula do Teorema 1.15 para a derivada do quociente, podemos calcular a derivada desta função tangente num qualquer ponto $x \in D_{\tan}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{(\cos)^2(x)} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\end{aligned}$$

onde se usaram as derivadas das funções seno e cosseno (Exemplo 1.4 e Exercício 1.5), bem como a relação fundamental (**??**) entre o seno e o cosseno.

Concluimos assim que

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \ \forall x \in D_{\tan}\,. \tag{5}$$

Note-se que, definindo a função secante como sendo $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, vem

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x.$$

Refira-se que a função cossecante é definida como sendo $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Exercício 1.21. Mostre que $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$.

Derivada de Funções Compostas.

Teorema 1.22. *Sejam $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in D_f$. Então, a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f \circ g}$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

Dem. Vamos assumir que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $h \in]-\delta, \delta[$ com $(a+h) \in D_g$, tem-se $g(a+h) \neq g(a)$. Caso contrário, prova-se facilmente que $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$ (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Usando a definição de derivada, temos então que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(g(a+h)) - f(g(a))) \cdot (g(a+h) - g(a))}{h \cdot (g(a+h) - g(a))} \qquad (g(a+h) \neq g(a)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Como g é por hipótese diferenciável em a, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$, em que $h \to 0 \Rightarrow y \to g(a) = b$ (porque, pelo Teorema 1.13, g é contínua em a), e usando o Teorema **??** referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b),$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de f ser por hipótese diferenciável no ponto $b = g(a)$.

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.23. Estamos por fim em condições de mostrar o resultado enunciado no Exemplo 1.18. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, observe-se que

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = f \circ g(x), \qquad \text{para} \;\; g(x) = \alpha \ln x \;\; \text{e} \;\; f(x) = e^x.$$

Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$, vem então:

$$(x^\alpha)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Exemplo 1.24. Seja $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função positiva e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos a função $g^\alpha : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $(g^\alpha)(x) = g(x)^\alpha$, $\forall x \in D$. Observando que $g^\alpha = (f \circ g)$, com $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(y) = y^\alpha$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, podemos usar o Teorema 1.22 e o resultado do Exemplo 1.23 para concluir que, se g é diferenciável num ponto $a \in D$, então g^α também é diferenciável nesse ponto a e

$$\begin{aligned}
(g^\alpha)'(a) &= (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \\
&= \left(\alpha y^{\alpha-1}\right)|_{y=g(a)} \cdot g'(a) \\
&= \alpha\, g(a)^{\alpha-1} \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d}{dx} g^\alpha(x) = \alpha\, g(x)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} g(x).$$

Exemplo 1.25. Quando o expoente α do exemplo anterior é um número inteiro, não é necessário que a função g seja positiva para a validade do resultado. Na realidade, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e qualquer função $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável num ponto $a \in D$, a função $g^n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é diferenciável nesse ponto $a \in D$ e

$$\frac{d}{dx} g^n(x) = n\, g(x)^{n-1} \frac{d}{dx} g(x)\,. \tag{6}$$

Por exemplo, temos que:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^5(x) = 5 \operatorname{sen}^4(x) \cos(x).$$

Exercício 1.26. Mostre que $(a^x)' = (\ln a) a^x$ e que $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a, x > 0)$.

Nota 1.27. Na notação de Leibniz a regra da função composta pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dy} f(y)\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x).$$

Muitas vezes esta fórmula é expressa na seguinte forma abreviada: se $y = g(x)$ e $z = f(y)$, então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{7}$$

Chama-se a isto a *regra da cadeia* (verão em Cálculo Diferencial e Integral II uma generalização disto para funções que dependem de mais do que uma variável).

Na forma (7) existe um certo abuso de linguagem pois, por exemplo, z no lado esquerdo significa a função composta $f(g(x))$ enquanto que z no lado direito significa a função $f(y)$. No entanto, este tipo de expressão é útil como ilustramos de seguida.

Suponhamos que queremos calcular a derivada da função $\ln(x^2 + 1)$. Então tomamos $z = \ln y$ e $y = x^2 + 1$. Temos pois:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot (2x).$$

No final devemos substituir y por $x^2 + 1$, obtendo:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

que é o resultado correcto.

Derivada de Funções Inversas.

Já vimos em que condições a continuidade de f implica a continuidade de f^{-1} (recorde-se o Teorema **??**). Vamos agora ver o que podemos concluir sobre f^{-1} quando f é diferenciável.

Nota 1.28. Notem que, dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua injectiva e definida num intervalo, se f é crescente (resp. decrescente) então f^{-1} é crescente (resp. decrescente).

Teorema 1.29. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo I, e seja $f^{-1} : f(I) \to I$ a sua inversa. Se f é diferenciável num ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Dem. Para a prova completa deste resultado podem consultar o Teorema 4.1.9 deste livro. Aqui, assumindo que f é diferenciável em todo o intervalo I, com $f'(x) \neq 0$, provaremos apenas que, se f^{-1} é diferenciável em $f(I)$, o valor da sua derivada é, de facto, o especificado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa e o Teorema 1.22, temos que

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) = x &\Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,, \ \forall x \in I\,.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$, obtemos assim o resultado pretendido. $\square$

Exemplo 1.30. Consideremos a função $f(x) = x^n$ e a sua inversa $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ que estão definidas em $\mathbb{R}$, para n ímpar, e em $[0, +\infty]$, para n par. Concluímos do Teorema **??**, que a raíz-n é uma função contínua em todo o seu domínio. Por outro lado, temos que (Exercício 1.17):

$$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0, \text{ se } x \neq 0.$$

Segue-se do Teorema 1.29 que f^{-1} é diferenciável para $y \neq 0$ e que a sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

Note-se que este é um caso particular do Exemplo 1.23 (aqui para $\alpha = \frac{1}{n}$), deduzido com recurso a outros métodos.

Exemplo 1.31. Como a função sen é contínua, concluímos do Teorema **??** que a função arcsen é contínua. Como sen é diferenciável e

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq 0\,,\ \forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\,,$$

temos pelo Teorema 1.29 que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto $x \in \left]-1, 1\right[$. Para calcular a sua derivada observamos que

$$(\operatorname{arcsen} x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}\,,\ \forall x \in \left]-1, 1\right[\,.$$

Como

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}\,,\ \forall x \in [-1, 1] \quad \text{(exercício)},$$

concluímos que:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall x \in \left]-1, 1\right[\,. \tag{8}$$

Exercício 1.32. Mostre que arccos é diferenciável em $]-1, 1[$ com derivada dada por:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall x \in \left]-1, 1\right[\,. \tag{9}$$

Exemplo 1.33. Como a tangente é uma função contínua, a função arco tangente também é uma função contínua. Por outro lado, pela fórmula (5) para a derivada da tangente, temos que

$$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0\,,\ \forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\,.$$

Podemos então aplicar o Teorema 1.29 para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(exercício)},$$

temos então que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{10}$$

Exemplo 1.34. A função exponencial é estritamente crescente, e portanto injectiva, em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, com contradomínio $\mathbb{R}^+$. A sua inversa é a função *logaritmo*. Como a função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$, a função logaritmo também é contínua. Como

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

temos pelo Teorema 1.29 que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e

$$f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow (\ln x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Como a derivada da função exponencial f é a própria função exponencial f, temos então que

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ . \tag{11}$$

Obtivemos assim de novo, mas com outro argumento, a expressão da derivada de $\ln x$ (recorde-se que no Exemplo 1.7 usámos a definição de derivada).

Exercício 1.35. Considere a função seno hiperbólico definida no Exemplo **??**. Mostre que a sua função inversa, argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é tal que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 1.36. Considere a restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo $[0, +\infty[$ (cf. Exemplo **??**). Mostre que a sua função inversa, argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$, é tal que

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\,, \ \forall x \in [1, +\infty[\,, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \ \forall x \in\,]1, +\infty[\,.$$

Para resumir, apresenta-se de seguida uma tabela com a derivada de algumas funções. Na coluna da direita, u representa uma função de x. Devem decorar a coluna da esquerda como se se tratasse da tabuada! Observe-se como a coluna da direta resulta da da esquerda em combinação com o Teorema da Derivada da Composta.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
$(a^x)' = (\ln a) a^x$	$(a^u)' = (\ln a) a^u u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$(\operatorname{senh} u)' = u' \cdot \cosh u$
$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$	$(\cosh u)' = u' \cdot \operatorname{senh} u$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u' \cdot \csc^2 u$
$(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Diferenciabilidade e Extremos Locais.

Definição 1.37. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f tem um *máximo local em* c (resp. um *mínimo local em* c) se existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)\,,\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (resp. $f(x) \geq f(c)\,,\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$). Diremos que f tem um *extremo local em* c se f tiver um máximo ou mínimo locais em $c \in D$.

Teorema 1.38. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I =]a, b[$, tal que f tem um extremo local num ponto $c \in I$. Então, se f é diferenciável no ponto c, tem-se $f'(c) = 0$.*

Dem. Suponhamos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a, b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in V_\delta(c) =]c - \delta, c + \delta[$,

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0.$$

Usando este facto, temos então

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0\,,$$

enquanto

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0\,.$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto c, podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

□

Nota 1.39. O Teorema 1.38 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Por exemplo, a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na Figura 3, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, mas não tem um extremo local nesse ponto.

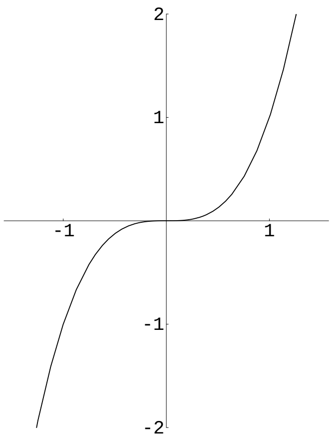

FIGURA 3. Gráfico da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Um ponto c onde $f'(c) = 0$ chama-se *ponto crítico* de f. Assim, resumindo a nossa discussão, um extremo local é também um ponto crítico, mas podem existir pontos críticos que não são extremos locais.

Nota 1.40. Uma função pode ter um extremo local num ponto sem que seja diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a função módulo do Exemplo 1.10 tem um mínimo no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Exemplo 1.41. O Teorema 1.38 fornece-nos um método para calcular o máximo e o mínimo de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (recorde-se que, pelo Teorema Weierstrass, sabemos que existe um máximo e um mínimo), De facto, os pontos onde f pode ter um máximo ou mínimo são:

(1) Os pontos de $]a, b[$ onde f não é diferenciável;
(2) Os pontos críticos de f em $]a, b[$;

(3) Os extremos a e b.

Assim, apenas há que determinar estes pontos e depois calcular f em cada um destes pontos para verificar se são máximos ou mínimos de f.

Por exemplo, seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 - x$. Esta função tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ para todo o $x \in [-1, 2]$. Assim, não existem pontos do primeiro tipo a considerar. Como $f'(x) = 0$ sse

$$3x^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1, 2[$, estes são os pontos do segundo tipo a considerar. Finalmente, temos os extremos do intervalo $x = -1$ e $x = 2$.

Temos então que calcular os valores de f em cada um destes pontos. Verifiquem que:

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Portanto, o máximo de f é 6 e ocorre em $x = 2$; o mínimo é $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ e ocorre em $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Teorema de Rolle.

Teorema 1.42. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[\ : \ f'(c) = 0\,.$$

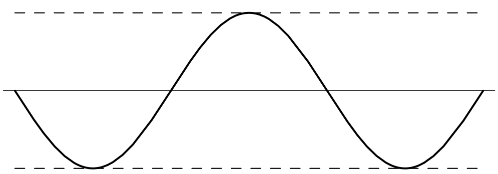

FIGURA 4. Versão geométrica do Teorema de Rolle.

Dem. Como f está nas condições do Teorema **??** - Weierstrass, sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f\,.$$

Se $M = m$, então f é uma função constante em $[a, b]$ pelo que

$$f'(c) = 0\,, \ \forall\, c \in]a, b[\ .$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c \in]a, b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c. Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 1.38 para concluir que então $f'(c) = 0$. ☐

Corolário 1.43. *Entre dois zeros de uma função diferenciável existe sempre (pelo menos) um zero da sua derivada*

Dem. Basta aplicar o Teorema 1.42 a uma função f, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. ☐

Corolário 1.44. *Entre dois zeros <u>consecutivos</u> da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

Dem. Redução ao absurdo + Corolário 1.43. Exercício. ☐

Exemplo 1.45. Se f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem 3 raízes, então f'' tem (pelo menos) um zero: se $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$, com $r_1 < r_2 < r_3$, então do Teorema de Rolle vem $f'(s_1) = f'(s_2) = 0$ para alguns $s_1 \in]r_1, r_2[$ e $s_2 \in]r_2, r_3[$. Aplicando agora o Teorema de Rolle a f' - que é também diferenciável em $\mathbb{R}$ - temos que f'' tem (pelo menos) um zero em $]s_1, s_2[$.

Exemplo 1.46. A equação $e^x = 3x$ tem exactamente 2 soluções: Vemos separadamente que:

(1) tem pelo menos 2 soluções. (Exercício, usando o Teorema de Bolzano).
(2) tem no máximo 2 soluções (pelo Teorema de Rolle).

Logo terá exactamente 2 soluções. Para ver (b): seja $f(x) = e^x - 3x$, diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = e^x - 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ tem uma só solução. Segue-se do Teorema de Rolle que f tem no máximo dois zeros.

Geometricamente, o Teorema de Rolle diz que há um ponto $c \in]a, b[$ tal que a reta tangente é horizontal, ou seja, paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (já que assumimos $f(a) = f(b)$).

Teorema de Lagrange.
O próximo teorema é um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial, a partir do qual se deduzem várias propriedades fundamentais.

Teorema 1.47. (Teorema de Lagrange) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Nota 1.48. O Teorema de Rolle é o caso particular do Teorema de Lagrange que se obtém quando $f(a) = f(b)$. Geometricamente, o Teorema de Lagrange diz que há um ponto $c \in]a, b[$ tal que a reta tangente é paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

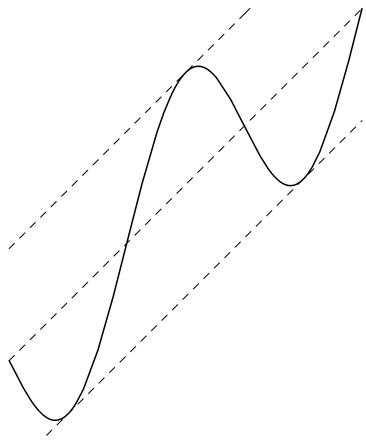

Figura 5. Versão geométrica do Teorema de Lagrange.

Nota 1.49. No caso em que $f = f(t)$ representa a posição de um objecto em movimento ao longo de uma reta entre os instantes de tempo $t = a$ e $t = b$, o Teorema de Lagrange afirma que há sempre um instante de tempo onde a velocidade instantânea é igual à velocidade média.

Dem. Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R}\,.$$

Temos assim que

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \Rightarrow f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a\,.$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \lambda x\,,\ \forall\, x \in [a, b]\ .$$

Como
$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a \Rightarrow g(b) = g(a)$$
e g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in\,]a, b[$ tal que
$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \qquad \square$$

Exemplo 1.50. Prove-se que $e^x > 1 + x$, $x > 0$.

Vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$
Como $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$ e $x > 0$, logo
$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$
(Também é verdade que $e^x > 1 + x$, para $x < 0$. Reparem que $y = x + 1$ é a equação da recta tangente em $x = 0$.)

Exemplo 1.51. Prove-se que $x < \tan x$, $x \in]0, \pi/2[$.

De novo, vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = \tan x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1$$
já que $\cos^2 x < 1$ em $]0, \pi/2[$. Logo como $x > 0$, segue-se que $\tan x > x$.

O Teorema de Lagrange está na base de tudo o que veremos a seguir, já que nos permite estudar o comportamento de uma função a partir de propriedades (muitas vezes simples) da sua derivada. É fundamental em:

- estudo de monotonia e classificação de extremos a partir do sinal da derivada;
- cálculo de limites - levantamento de indeterminações (Regra de Cauchy);
- estudo de concavidades a partir do sinal da segunda derivada;
- aproximação de funções por polinómios (Polinómio de Taylor);

Exemplos de Aplicação do Teorema de Lagrange.

Corolário 1.52. *Se f é uma função nas condições do Teorema de Lagrange, então:*

(i) $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é constante em* $[a, b]$*;*
(ii) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente crescente em* $[a, b]$*;*
(iii) $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente decrescente em* $[a, b]$*.*

Dem. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$. Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in\,]x_1, x_2[$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f'(c) = 0; \\ > 0\,, & \text{se } f'(c) > 0; \\ < 0\,, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$
Logo,
$$\text{a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante,} & \text{se } f'(c) = 0; \\ \text{crescente,} & \text{se } f'(c) > 0; \\ \text{decrescente,} & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$
$\square$

Exemplo 1.53. Consideremos a função $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente no Exemplo 1.41. Vimos então que $f'(x) = 3x^2 - 1$ tem dois zeros (pontos críticos) em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Temos que:

- $f'(x) > 0$ no intervalo $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo;
- $f'(x) < 0$ no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente decrescente neste intervalo;
- $f'(x) > 0$ no intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2)$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo.

Estes intervalos de monotonia mostram que $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local de f.

Corolário 1.54. *Seja f uma função nas condições do Teorema de Lagrange. Então, se existir o $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_d(a)$ e*

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)\,.$$

Analogamente, se existir o $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_e(b)$ e

$$f'_e(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)\,.$$

Dem. Para cada $x \in]a,b[$, sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um $\xi = \xi(x) \in]a,x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x\to a+} \xi(x) = a^+\,,$$

podemos usar o Teorema **??**, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi)\,. \qquad \square$$

Este último resultado é especialmente útil para verificar a diferenciabilidade nalguns pontos delicados de funções definidas por ramos, já que permite evitar em muitos casos o cálculo de derivadas à esquerda e à direita por definição.

Exemplo 1.55. Pretende-se determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2/2} = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0; \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x < 0 \end{cases}$$

é diferenciável, bem como calcular a sua derivada nesses pontos.

Para $x > 0$ a função f é definida por $f(x) = x\,e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, pelo que é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(x\,e^{-x^2/2}\right)' = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot ((-x)\,e^{-x^2/2}) = (1 - x^2)\,e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Para $x < 0$ a função f é definida por $f(x) = -x\,e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$, pelo que também é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(-x\,e^{-x^2/2}\right)' = (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot ((-x)\,e^{-x^2/2}) = (-1 + x^2)\,e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^-\,.$$

Para $x = 0$, podemos usar o Corolário 1.54 do Teorema de Lagrange para calcular as derivadas laterais de f:

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2)\,e^{-x^2/2} = 1 \quad \text{e}$$
$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1 + x^2)\,e^{-x^2/2} = -1\,.$$

Como $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_e(0)$, concluimos que f não é diferenciável no ponto zero.

Exemplo 1.56. Seja $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, $f(0) = \pi/2$.

Temos f contínua em 0 e $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $x > 0$, logo $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$ e assim $f'_d(0) = -1$. Para $x < 0$ temos $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ logo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ e assim $f'_e(0) = 1$. Conclui-se que f não é diferenciável em 0.

Teorema de Cauchy.

Teorema 1.57. (Teorema de Cauchy) *Sejam f e g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciáveis em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\,]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in\,]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Nota 1.58. O Teorema de Lagrange é o caso particular do Teorema de Cauchy que se obtém quando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x\,,\ \forall\, x \in [a,b]$.

Dem. Sabemos pelo Teorema de Rolle que

$$g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\,]a,b[\;\Rightarrow\; g(a) \neq g(b)\,.$$

Seja então

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \mathbb{R}\,,$$

e consideremos a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)\,,\ \forall\, x \in [a,b]\ .$$

Temos então que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (verifiquem que de facto assim é), e φ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Podemos portanto aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in\,]a,b[$ tal que

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,. \qquad \square$$

Regra de Cauchy ou de L'Hôpital.

Teorema 1.59. (Regra de Cauchy – primeira versão) *Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto $]a,b[$. Suponhamos também que:*

(i) $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\,]a,b[$;
(ii)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a^+} g(x)\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe em } \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe em } \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Nota 1.60. As versões análogas deste teorema para os limites

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } a = -\infty), \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } b = +\infty),$$

também são válidas e serão usadas na sequência.

Dem. Faremos apenas o caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Podemos então prolongar f e g por continuidade ao ponto $a \in \mathbb{R}$, fazendo $f(a) = 0 = g(a)$, e usar o Teorema de Cauchy para mostrar que, para cada $x \in \,]a, b[$, existe um $\xi = \xi(x) \in \,]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Como $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$, podemos então concluir que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} . \qquad \square$$

Corolário 1.61. (Regra de Cauchy – segunda versão) *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ um ponto desse intevalo (ou $a = -\infty$ se $I = \,]-\infty, c[$, ou $a = +\infty$ se $I = \,]c, +\infty[$, com $c \in \mathbb{R}$), f e g funções definidas e diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in I \setminus \{a\}$. Suponhamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x) .$$

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite da direita existir em $\overline{\mathbb{R}}$.

Temos assim que a Regra de Cauchy é um método para

resolver indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ em limites de funções diferenciáveis.

Exemplos de Aplicação da Regra de Cauchy.

Exemplo 1.62.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1 .$$

Exemplo 1.63.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} . \tag{12}$$

Exemplo 1.64.

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^+ \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 .$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 . \tag{13}$$

Exemplo 1.65. O cálculo seguinte ilustra mais uma aplicação simples da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty .$$

De facto, combinando este tipo de cálculo com o Método de Indução Matemática, obtém-se facilmente que:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} . \tag{14}$$

Efetuando a mudança de variável $y = e^x$, deduzimos que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} .$$

Exemplo 1.66. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Uma primeira tentativa poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{0}{0} = \cdots$$

Uma segunda abordagem, com melhores resultados, poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

De facto, e tendo em conta o resultado (14) do Exemplo 1.65, a melhor abordagem seria neste caso a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$

onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty$.

Exemplo 1.67. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^0 = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que

$$x^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln(x^{\operatorname{sen} x})} = e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x}$$

(onde usámos a continuidade da função exponencial), podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot\frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x} = e^0 = 1.$$

Nota 1.68. O método do exemplo anterior, que permitiu resolver uma indeterminação do tipo 0^0, também pode ser usado para resolver indeterminações do tipo ∞^0 e 1^∞.

Exemplo 1.69. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = 1^\infty = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$,

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\ln((\cos x)^{1/x^2})} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}},$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} = -1\cdot\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Derivadas de Ordem Superior à Primeira.

Definição 1.70. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo $I =]a, b[$. Se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável, a sua derivada $(f')'$ é designada por *segunda derivada de f* e representa-se por

$$f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f^{(2)} .$$

Mais geralmente, a *n-ésima derivada de f* define-se, por recorrência, como a derivada da $(n-1)$-ésima derivada de f, quando esta existir:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) .$$

Definição 1.71. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que *f é uma função de classe $C^n(I)$*, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que f é uma função de classe $C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.72. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ x^2\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \qquad (H \text{ representa a função de Heaviside – Exemplo ??.})$$

Esta função é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = 2x \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2x\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada f' é por sua vez contínua em todo o $\mathbb{R}$, mas diferenciável apenas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2\,, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $f''_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$, não existe de facto segunda derivada de f no ponto zero.

Assim, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ mas $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.73. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = (x^2 \cos(1/x))' = 2x \cdot \cos(1/x) + x^2 \cdot ((-1/x^2)(-\operatorname{sen}(1/x))) = 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,,\ \forall x \neq 0\,.$$

Pelo Princípio do Encaixe (Teorema ??) tal como já tinha sido feito no Exemplo ??, temos:

$$\lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = (\text{infinitésimo}) \times (\text{função limitada}) = 0\,.$$

Assim, vemos que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x) = \text{ não existe (cf. Exemplo ??)},$$

pelo que neste caso não é possível recorrer ao Corolário 1.54.

De facto, a função f é diferenciável no ponto zero com derivada $f'(0) = 0$, como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0\,.$$

Temos assim que f é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, como o $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe, esta função f' não é contínua no ponto zero.

Temos então que $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas $f' \notin C^0(\mathbb{R})$ pelo que $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.74. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de f existe e é contínua em todo o $\mathbb{R}$:

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \text{ dada por } f^{(n)}(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Segunda Derivada e Extremos Locais. A segunda derivada fornece-nos um teste simples para verificar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local:

Teorema 1.75. *Seja f uma função de classe $C^2(]a,b[)$ e $c \in\,]a,b[$ um ponto crítico de f. Então,*

(i) *$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ tem um mínimo local em c;*
(ii) *$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ tem um máximo local em c.*

Nota 1.76. Quando $f''(c) = 0$, e tendo apenas essa informação, nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico c.

Dem.
(i) Temos por hipótese que f'' é uma função contínua, com $f''(c) > 0$. Pelo Corolário **??**, sabemos então que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f''(x) > 0 \text{ para todo o } x \in\,]c-\delta, c+\delta[.$$

Podemos agora usar o Corolário 1.52 do Teorema de Lagrange para concluir que

$$\text{a função } f' \text{ é estritamente crescente no intervalo }]c-\delta, c+\delta[.$$

Como por hipótese c é um ponto crítico de f, sabemos que $f'(c) = 0$ pelo que

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in\,]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x \in\,]c, c+\delta[\ .$$

Usando novamente o Corolário 1.52 do Teorema de Lagrange, podemos finalmente concluir que

$$f \text{ é decrescente em }]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f \text{ é crescente em }]c, c+\delta[,$$

pelo que f tem, de facto, um mínimo local no ponto $c \in\,]a,b[$.
(ii) Exactamento análogo a (i). □

Exemplo 1.77. Voltemos ao exemplo da função $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente. Vimos que os pontos críticos de f eram $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $f''(x) = 6x$, temos que:

$$f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0, \quad f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0,$$

logo $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local. Esta mesma informação tinha sido obtida anteriormente analizando o sinal da primeira derivada.

Concavidades e Inflexões.

Definição 1.78. Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $c \in\,]a,b[$. Diremos que f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c), ou que f tem a *concavidade voltada para cima* em c (resp. *concavidade voltada para baixo* em c), se o gráfico de f estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de c) por *cima* (resp. *baixo*) da *recta tangente* ao gráfico de f no ponto c. Ou seja, f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c) se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in\,]c-\delta, c+\delta[$$
$$(\text{resp. } f(x) - f(c) \leq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in\,]c-\delta, c+\delta[).$$

Diremos que f tem um *ponto de inflexão* em c se existir $\delta > 0$ tal que, f é convexa num dos intervalos $]c-\delta, c[$ ou $]c, c+\delta[$ e côncava no outro.

Teorema 1.79. *Sejam $f \in C^2(]a,b[)$ e $c \in\,]a,b[$. Então:*

(i) *$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ é convexa em c;*
(ii) *$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ é côncava em c;*
(iii) *($f''(c) = 0$ e f'' muda de sinal em c) $\Rightarrow f$ tem um ponto de inflexão em c.*

Dem. Consideremos a função auxiliar $g :]a, b[\to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c) \cdot (x - c)\,, \ \forall\, x \in]a, b[\ .$$

Tendo em conta a Definição 1.78, temos que estudar o sinal desta função auxiliar g numa vizinhança de $c \in]a, b[$.

Observemos primeiro que:

$$g(c) = 0\,; \quad g'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow g'(c) = 0\,; \quad g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(c) = f''(c)\,.$$

Tendo em conta o Teorema 1.75, podemos então concluir que:

(i) $(f''(c) > 0) \Rightarrow (g''(c) > 0) \Rightarrow (g$ tem um mínimo local em $c) \Rightarrow (g(x) \geq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow (f$ é convexa em $c)$;
(ii) $(f''(c) < 0) \Rightarrow (g''(c) < 0) \Rightarrow (g$ tem um máximo local em $c) \Rightarrow (g(x) \leq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow (f$ é côncava em $c)$;
(iii) $(f''$ muda de sinal em $c) \Rightarrow (f$ muda de convexidade em $c)$.

□

Assímptotas ao Gráfico de Uma Função.

Definição 1.80. (Assímptotas Verticais) Sejam I um intervalo, $a \in I$ e f uma função definida em $I \setminus \{a\}$. Diremos que a recta vertical de equação $x = a$ é uma *assímptota vertical* ao gráfico de f se

$$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty \quad \text{(qualquer uma das 4 combinações de sinais serve).}$$

Definição 1.81. (Assímptotas Oblíquas) Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diremos que a recta de equação

$$y = m \cdot x + p\,, \ m, p \in \mathbb{R}\,,$$

é uma *assímptota à esquerda* ao gráfico de f (resp. *assímptota à direita* ao gráfico de f) se

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$$
$$\text{(resp. } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0)\,.$$

No caso particular em que $m = 0$, diremos que o gráfico de f tem uma *assímptota horizontal à esquerda* (resp. *assímptota horizontal à direita*).

Teorema 1.82. *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$\text{(a)} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{(b)} \quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$
$$\text{(resp. (a)} \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{(b)} \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x)\,)\,.$$

Nesse caso, a assímptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação

$$y = m \cdot x + p\,.$$

Dem. Faremos apenas o caso da assímptota à esquerda, sendo o da assímptota à direita completamente análogo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a recta de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$, é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. Então

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a função auxiliar φ, definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p))\ , \ \text{satisfaz} \ \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+p+\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(m+\frac{p}{x}+\frac{\varphi(x)}{x}\right)=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}(p+\varphi(x))=p\in\mathbb{R}\,,$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores $m,p\in\mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(m\cdot x+p))=0\,,$$

pelo que a recta de equação $y=mx+p$ é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. $\square$

Exemplo de traçado do gráfico de uma função.

Exemplo 1.83. Pretende-se determinar intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=x\cdot e^{1/x}\,,\ \forall\,x\neq 0\,,$$

bem como esboçar o seu gráfico.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f'(x)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\,,\ \forall\,x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f'(x)=\begin{cases}>0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[;\\ =0\,, & \text{se } x=1;\\ <0\,, & \text{se } x\in\,]0,1[;\end{cases}$$

logo concluímos que

$$f \text{ é }\begin{cases}\text{crescente}\,, & \text{em }]-\infty,0[\text{ e em }]1,+\infty[;\\ \\ \text{decrescente}\,, & \text{em }]0,1[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que f tem um mínimo local em $x=1$.

A derivada f' é também diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f'':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f''(x)=\frac{e^{1/x}}{x^3}\,,\ \forall\,x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f''(x)=\begin{cases}<0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[;\\ >0\,, & \text{se } x\in\,]0,+\infty[;\end{cases}\Rightarrow f \text{ é }\begin{cases}\text{côncava}\,, & \text{em }]-\infty,0[;\\ \text{convexa}\,, & \text{em }]0,+\infty[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que f não tem pontos de inflexão (notem que f não está sequer definida no ponto zero).

O único ponto onde f pode ter uma assímptota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x\cdot e^{1/x}=0\cdot e^{-\infty}=0\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\cdot e^{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\frac{+\infty}{+\infty}\overset{\text{RC}}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty\,.$$

O resultado deste segundo limite diz-nos que a recta vertical de equação $x=0$ é de facto uma assímptota vertical ao gráfico de f.

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot e^{1/x}-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{y\to 0^\pm}\frac{e^y-1}{y} = 1 = p\in\mathbb{R}$$

(onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x\to\pm\infty \Leftrightarrow y\to 0^\pm$), temos que a recta de equação $y = x+1$ é uma assímptota ao gráfico de f, tanto à direita como à esquerda.

A Figura 6 apresenta o esboço do gráfico de f.

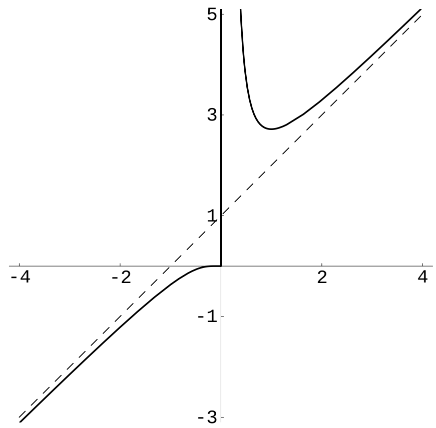

FIGURA 6. Esboço do gráfico da função f do Exemplo 1.83.

Polinómio de Taylor. Seja $f : D\to\mathbb{R}$ uma função real que é diferenciável em $x = a$. Recordemos que a recta tangente ao gráfico de f em a é dada pelo gráfico do polinómio do 1º grau:

$$p_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Podemos ver este polinómio $p_{1,a}(x)$ do 1º grau como uma aproximação de 1ª ordem à nossa função f, em torno de $x = a$.

Suponhamos que, em vez de aproximar $f(x)$ por um polinómio do 1º grau, queríamos aproximar $f(x)$ por um polinómio do 2º grau, em torno de $x = a$. Vamos escrever este polinómio na forma:

$$p_{2,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2.$$

O seu gráfico é a parábola que melhor aproxima o gráfico de f em torno de $x = a$, como sugerido na figura abaixo.

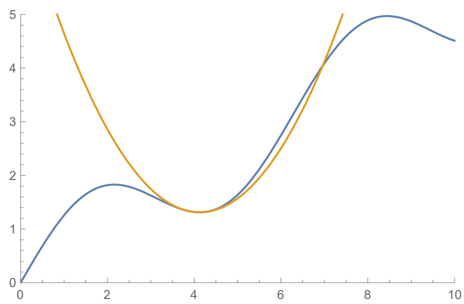

FIGURA 7. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x/2$ e a aproximação por um polinómio de grau 2 em torno de $x = 4$.

Notem que se $p_{2,a}(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ em torno de a, então os valores $p_{2,a}(x)$ e de $f(x)$ em a, bem como os das suas derivadas, deverão coincidir:

$$f(a) = p_{2,a}(a) = a_0,$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= p'_{2,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{2,a}(a) = 2a_2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o polinómio $p_{2,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ em 2ª ordem em torno de $x = a$ deverá ser dado por:

$$p_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

É claro que nada nos impede de tentar aproximar f, em torno de a, por um polinómio de grau n qualquer. Nesse caso, escrevendo o polinómio na forma:

$$p_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

e impondo que $f(x)$ e $p_{n,a}(x)$ tenham as mesmas derivadas até ordem n, obtemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= p_{n,a}(a) = a_0, \\ f'(a) &= p'_{n,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{n,a}(a) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(a) &= p^{(k)}_{n,a}(a) = k!a_k, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= p^{(n)}_{n,a}(a) = n!a_n. \end{aligned}$$

Concluímos que se f é diferenciável até ordem n, o polinómio $p_{n,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ até ordem n, em torno de $x = a$, deverá ser dado por:

$$(15)\quad p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Definição 1.84. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$. Chama-se **polinómio de Taylor de grau n de f em a**, ao polinómio de grau n dado por (15).

No caso das funções elementares este polinómio é muito simples de calcular.

Exemplo 1.85. Seja $f(x) = e^x$. Notem que, para qualquer natural k,

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Assim, temos que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, logo o polinómio de Taylor de e^x de grau n, em $x = 0$, é:

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Exemplo 1.86. Seja $f(x) = \ln x$. Vamos calcular o polinómio de Taylor de grau n, em $x = 1$. Um cálculo simples fornece:

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{x}, & \ln'(1) &= 1; \\ \ln''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \ln''(1) &= -1; \\ \ln'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \ln'''(1) &= 2; \\ &\vdots \\ \ln^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}, & \ln^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)!. \end{aligned}$$

Logo o polinómio de Taylor de $\ln x$ de grau n, em $x = 1$, é:

$$p_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}.$$

Exemplo 1.87. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Notem que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x),\ \operatorname{sen}''(x) = \cos'(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}''' x = -\operatorname{sen}' x = -\cos x,\ \operatorname{sen}''''(x) = -\cos' x = \operatorname{sen} x.$$

Tendo obtido $\operatorname{sen} x$ de novo, não precisamos de calcular mais derivadas: as derivadas repetem-se num ciclo de 4. Em particular, em $x = 0$ obtemos:

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}^{(4)}(0) = \operatorname{sen}^{(8)}(0) = \cdots = 0,$$
$$\operatorname{sen}'(0) = \operatorname{sen}^{(5)}(0) = \operatorname{sen}^{(9)}(0) = \cdots = \cos(0) = 1,$$
$$\operatorname{sen}''(0) = \operatorname{sen}^{(6)}(0) = \operatorname{sen}^{(10)}(0) = \cdots = -\operatorname{sen}(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = \operatorname{sen}^{(7)}(0) = \operatorname{sen}^{(11)}(0) = \cdots = -\cos(0) = -1.$$

Portanto, o polinómio de Taylor de $\operatorname{sen} x$, em $x = 0$, é:

$$p_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Exercício 1.88. Mostrem que o polinómio de Taylor de $\cos x$, em $x = 0$, é:

$$p_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

O resultado seguinte torna precisa a ideia de que o polinómio de Taylor de grau n é uma boa aproximação da função até ordem n:

Teorema 1.89. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$ e seja $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau n em a. Então:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração. Notem que se separarmos o termo de grau n no polinómio de Taylor, obtemos:

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Basta pois mostrar que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Para isso, vamos aplicar a regra de Cauchy: Seja $h(x) := f(x) - p_{n-1,a}(x)$ o numerador e $g(x) := (x-a)^n$ o denominador. Deve ser claro que:

- $h^{(k)}(x)$ é contínua em a para $0 \le k \le n-1$;
- $h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0$, pois $f(x)$ e $p_{n-1,a}(x)$ têm as mesmas derivadas em a até ordem $n-1$;
- $g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$.

Podemos pois aplicar a regra de Cauchy $n-1$ vezes, obtendo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - p_{n-1,a}^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Observem que como $p_{n-1,a}(x)$ é um polinómio de grau $n-1$, a sua derivada de ordem $n-1$ é constante. De facto, $p_{n-1,a}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$, logo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

onde a última igualdade é simplesmente o facto de que $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. □

Resto e Teorema de Taylor. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau n. Definimos o **resto de ordem** n como sendo a função:

$$R_{n,a}(x) := f(x) - p_{n,a}(x).$$

Desta forma, podemos enunciar o Teorema 1.89 na forma equivalente:

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$, tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O resultado seguinte fornece uma expressão para o resto, que facilita a determinação de estimativas para o seu valor.

Teorema 1.90 (Teorema de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Seja $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a sua derivada de ordem $n+1$ existe. Seja $a \in [b,c]$. Então:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde o resto é dado pela fórmula:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \textit{para algum } \theta \textit{ entre } x \textit{ e } a.$$

Demonstração. Seja $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Repare-se que $R(a) = \cdots = R^{(n)}(a) = 0$ e $g(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$. Pelo Teorema de Cauchy, existe um ponto θ_1 entre a e x tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x) - R(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)}.$$

Aplicando novamente o teorema, existe θ_2 entre a e θ_1 (em particular entre a e x) tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)} = \frac{R(\theta_1) - R(a)}{g(\theta_1) - g(a)} = \frac{R''(\theta_2)}{g''(\theta_2)}.$$

Procedendo indutivamente, concluímos que existe θ_{n+1} entre a e x tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{g^{(n+1)}(\theta_{n+1})}.$$

Repare-se que

$$R^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = f^{(n+1)}(\theta_{n+1}), \quad g^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = (n+1)!.$$

Logo

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

Exemplo 1.91. A expansão de Taylor com resto do seno, em $x = 0$, é dada por:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Atendendo a que

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)| \leq 1, \forall \theta,$$

podemos estimar facilmente o resto:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Se, por exemplo, queremos calcular o valor de $\operatorname{sen} 2$ com um erro inferior a $0.0001 = 10^{-4}$, então devemos escolher o natural n de forma que:

$$\frac{|2|^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Experimentando $n = 1, 2, \ldots$, vemos que $n = 5$ funciona. Assim,

$$\operatorname{sen} 2 \simeq 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} = 0,90929$$

com um erro inferior a $0,0001$.

Extremos locais de ordem superior. Podemos utilizar o polinómio de Taylor para obter um teste para extremos locais que aperfeiçoa o teste que tínhamos estudado anteriormente no Teorema 1.75:

Proposição 1.92. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$ e suponha-se que:*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \ \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0$$

Então:

(i) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então f tem um máximo local em $x = a$;
(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = a$;
(iii) Se n é ímpar então f não tem nem um máximo local nem um mínimo local em $x = a$.

Por outras palavras, o comportamento de $f(x)$ em $x = a$ é idêntico ao comportamento do polinómio $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ em $x = a$:

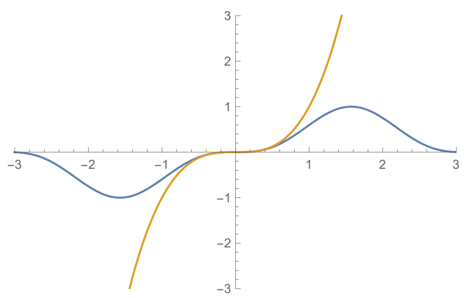

FIGURA 8. A função $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ e o polinómio x^3.

Demonstração. Como

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

o Teorema 1.89 diz-nos que:

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, concluímos que para x suficientemente perto de a:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \text{ tem o mesmo sinal que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

O resultado da proposição é uma consequência imediata deste facto. $\square$

Exemplo 1.93. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = (x-1)^3 \ln x.$$

Em $x = 1$ as derivadas desta função são:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)^3}{x} + 3(x-1)^2 \ln x & f'(1) &= 0 \\
f''(x) &= -\frac{(x-1)^3}{x^2} + 6\frac{(x-1)^2}{x} + 6(x-1)\ln x & f''(1) &= 0 \\
f'''(x) &= 2\frac{(x-1)^3}{x^3} - 9\frac{(x-1)^2}{x^2} + 18\frac{x-1}{x} + 6\ln x & f'''(1) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= -6\frac{(x-1)^3}{x^4} + 24\frac{(x-1)^2}{x^3} - 36\frac{x-1}{x^2} + \frac{24}{x} & f^{(4)}(1) &= 24
\end{aligned}$$

Concluímos que f possui um mínimo local em $x = 1$.

Nota 1.94. Este teste não resolve completamente o problema de determinar os extremos locais, mesmo de funções que possuam derivadas de todas as ordens. Por exemplo, a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

possui derivadas de todas as ordens. Em $x = 0$, temos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo o n, logo o teste não nos permite concluir nada. Na realidade, em $x = 0$ a função possui um mínimo pois $f(x) > 0$ se $x \neq 0$. Notem, ainda, que para esta função o polinómio de Taylor (de qualquer grau) em $x = 0$ é identicamente zero!

O número e é irracional. Uma outra aplicação curiosa da fórmula do resto é a seguinte:

Teorema 1.95. *O número* **e** *é irracional.*

Demonstração. Como $(e^x)' = e^x$ a expansão de Taylor com resto da exponencial em $x = 0$ é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Se $\theta \leq x$ então $e^\theta \leq e^x$, logo podemos estimar o resto, para $x > 0$, da seguinte forma:

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como sabemos que $e = e^1 \leq 3$, concluímos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R.$$

onde o resto satisfaz $0 < R < 3/(n+1)!$.

Suponhamos então, por absurdo, que e era um número racional a/b e escolha-se um natural $n > b$ e maior do que 3. Então, obtemos:

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R.$$

Como todos os termos, com excepção possivelmente de $n!R$, são números naturais, concluímos que $n!R$ também tem de ser um número natural. Este número natural deverá satisfazer a desigualdade:

$$0 < n!R < \frac{n!3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1.$$

Isto é uma contradição, pois é claro que não há nenhum número natural entre 0 e 1. $\square$

Recursos para auxílio ao estudo. Aconselha-se a utilização desta aplicação em Geogebra para acompanhar o estudo da secção sobre o Polinómio de Taylor. Na aplicação pode escolher-se: a função $f(x)$ a aproximar; o ponto a; n - a ordem do polinómio de Taylor. Recomenda-se a escolha de várias funções e a escolha de n's cada vez maiores; observe o que acontece com o gráfico do polinómio de Taylor (a vermelho), quando comparado com o gráfico da função $f(x)$ (a azul).