

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I**  
**LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1º SEMESTRE 2022/23**

INFORMAÇÕES GERAIS

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

**Programa.**

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raiz de índice  $n$ , funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo). Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em  $\mathbb{R}$ .** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em  $\mathbb{R}$ .** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

Estas notas de apoio foram compiladas a partir de material já existente produzido pelos professores Miguel Abreu, Rui Loja Fernandes, Manuel Ricou e Catarina Carvalho do Departamento de Matemática do Técnico.

1. NÚMEROS REAIS: REVISÕES E PROPRIEDADES

**Conteúdo**

1.1 Propriedades dos números reais	1
1.2 Módulo	7
1.3 Método de Indução	8
1.4 Somatórios	11

---

**1.1 Propriedades dos números reais.** Nestas primeiras aulas vamos rever/introduzir alguns conceitos que serão muito úteis (e utilizados) na cadeira: propriedades dos números reais, resolução de equações e inequações, módulos e distâncias, *supremos e ínfimos*, números naturais e recorrência, e o *método de indução matemática*.

Começemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

associados à contagem de objetos. Recorde-se também que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo:  $9 = 3^2$ ,  $21 = 3 \times 7$ ,  $245 = 3 \times 7^2$ . Em geral, dado  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $n = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ , onde  $p_1, \dots, p_m$  são números primos e  $n_1, \dots, n_m$  expoentes naturais.

O conjunto dos números *inteiros* é dado por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Observe-se que os inteiros estão naturalmente ordenados,

$$\dots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \dots,$$

e que podem ser representados geometricamente como pontos equidistantes numa reta:



De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\},$$

juntamente com alguns factos importantes.

**Representação decimal dos números racionais.** Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional; o resultado é sempre ou uma dízima finita, ou uma dízima infinita periódica. Por exemplo tem-se  $\frac{1}{3} = 0.(3)$ ,  $\frac{249}{16} = 15.5625$  e  $\frac{350}{21} = 16.(6)$ . Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração. Considerando por exemplo  $x := 0.(123) = 0.123123\dots$ , multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Observe-se que necessariamente se tem  $0.(9) = 1$ ,  $1.2(9) = 1.3$ , etc (basta repetir o processo anterior para o justificar). Assim, tem-se a seguinte caracterização alternativa do conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \{\text{dízimas finitas ou infinitas periódicas}\}.$$

**Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais.** O conjunto dos racionais é *fechado* para a soma (+) e para o produto ( $\cdot$ ), ou seja: dados dois racionais  $x = \frac{p}{q}$  e  $y = \frac{r}{s}$ , a soma  $x + y := \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}$  e o produto  $x \cdot y := \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$  são também números racionais. Recordemos agora algumas propriedades básicas das operações:

**P1. Propriedades da Soma.** Dados racionais  $a, b, c$ :

- (1) (Propriedade Comutativa)  $a + b = b + a$ ;
- (2) (Propriedade Associativa)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . Assim, podemos escrever  $a + b + c$  sem qualquer ambiguidade, por não interessar a ordem com que se soma.
- (3) (Elemento Neutro)  $a + 0 = 0 + a = a$ ;
- (4) (Elemento Simétrico):  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

**P2. Propriedades do Produto.** Dados racionais  $a, b, c$ :

- (a) (Propriedade Comutativa)  $a \cdot b = b \cdot a$ ;
- (b) (Propriedade Associativa)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . Assim, mais uma vez, podemos escrever  $abc$  sem qualquer ambiguidade.
- (c) (Elemento Neutro)  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;
- (e) (Elemento Inverso):  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$  para  $a \neq 0$  ( $\frac{1}{a}$  é também indicado como  $a^{-1}$ ).

Por fim, as operações de multiplicação e soma têm a seguinte relação:

- (f) (Propriedade Distributiva)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

O conjunto  $\mathbb{Q}$  é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais  $a$  e  $b$ , tem-se  $a \geq b$  ou  $a \leq b$ . A relação  $\leq$  diz-se uma relação de ordem em  $\mathbb{Q}$  compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

**P3. Propriedades da relação  $\leq$ :** Dados racionais  $a, b, c$ ,

(i) (Relação de ordem)  $a \leq a$ ;  $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$ ;  $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$ ;  
(chamadas respectivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

(ii) (Compatibilidade da soma)  $a \leq b \implies a + c \leq b + c$ ;

(iii) (Compatibilidade do produto)  $a \leq b$  e  $c > 0$  então  $ac \leq bc$ .

Por satisfazer estas três listas de propriedades,  $\mathbb{Q}$  diz-se um *corpo ordenado*.

É possível, mais uma vez, dar uma interpretação geométrica dos números racionais. Apesar desta ser conhecida e ter sido muito trabalhada ao longo do 3.º ciclo e do secundário, vale a pena relembrar como é feita rigorosamente: estando os números inteiros marcados numa reta de forma equidistante, faz-se o seguinte:

- a um número da forma  $\frac{1}{n} > 0$  com  $n \in \mathbb{N}$ , associamos um ponto  $P$  situado à direita da origem, de forma a que o segmento  $[0P]$  resulte de uma divisão do segmento unitário em  $n$  partes;
- Um racional  $\frac{m}{n} > 0$  é associado a um ponto  $P$  situado à direita da origem, de forma que o segmento  $[0P]$  corresponde à união de  $m$  segmentos de comprimento  $\frac{1}{n}$  colocados lado a lado a partir da origem;
- Para números negativos, repete-se o processo mas colocando o ponto  $P$  à esquerda da origem.

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta? Ou, perguntando de outra forma: fixada uma unidade de comprimento, será que os números racionais permitem determinar os comprimentos de todos os segmentos de reta possíveis? A resposta é não: basta considerar, por exemplo o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (que, pelo teorema de Pitágoras, mede  $\sqrt{2}$ , ou seja, um número positivo cujo quadrado é 2).

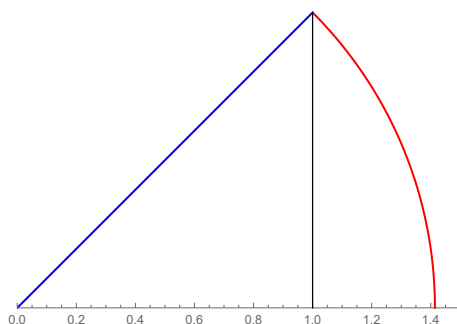


FIGURA 1. Construção geométrica do número real  $\sqrt{2}$ .

### Teorema 1.1

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

*Demonstração.* Vamos mostrar este resultado usando o método de “redução ao absurdo”, ou seja, supomos que a conclusão NÃO é verdadeira e chegamos a uma contradição (impossibilidade). Logo, a conclusão é obrigatoriamente verdadeira.

Suponhamos então que a conclusão é falsa, isto é, que  $\sqrt{2}$  (i.e., um número positivo cujo quadrado é 2) é um racional. Então existem números naturais  $p$  e  $q$  tais que  $\sqrt{2} = p/q$ , ou seja,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos assumir que  $p$  e  $q$  não têm nenhum divisor comum (senão começávamos por simplificar a fração, eliminando esses divisores comuns). Temos

$$(1) \quad p^2 = 2q^2,$$

donde  $p^2$  é um número par. Concluimos então que  $p$  também é par<sup>1</sup>, ou seja  $p = 2k$ , para algum natural  $k \in \mathbb{N}$ . Daqui e de (1), segue-se que:

$$4k^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2.$$

Logo,  $q^2$  é par, e portanto  $q$  também é um número par:  $q = 2s$ , para algum natural  $s \in \mathbb{N}$ .

Assim, acabámos de mostrar que tanto  $p$  como  $q$  possuem 2 como divisor comum, o que contradiz a nossa hipótese de que  $p$  e  $q$  não tinham divisores comuns.  $\square$

É então necessário “completar”  $\mathbb{Q}$ , considerando o conjunto dos números reais. Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1 a_2 a_3 \dots : p \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ para todo } i\}$$

(onde, tal como para os racionais, sempre que  $a_n = 9$  para todo  $n \geq \bar{n}$ , estamos na verdade na presença de uma dízima finita). Como de costume, dizemos que um elemento de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  é um número irracional (exemplo:  $\sqrt{2}$ , como foi visto no Teorema 1.1. Recorde, como trabalho extra e após a leitura deste capítulo, pode se concluir que  $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ ).

**Primeiro facto importante.** Pode mostrar-se que  $\mathbb{R}$ , quando munido das operações de multiplicação, adição, e da relação  $\leq$ , também é um corpo ordenado (i.e., as três listas de propriedades enumeradas anteriormente são válidas para quaisquer **reais**  $a, b, c$ ). Note-se que isto não é tão óbvio quanto se possa pensar à primeira vista: como se pode dar uma regra /algoritmo para somar ou multiplicar, por exemplo, os dois números reais:

$$x = 1.123123412345123456\dots \quad \text{e} \quad y = 2.(3)?$$

Esta observação mostra como a questão é delicada e nada simples. No entanto, mostra-se que há uma forma coerente de o fazer (os detalhes podem por exemplo ser encontrados [nesta página](#)).

**Segundo facto importante.** Também se mostra que há uma correspondência biunívoca (e que mantém a ordem) entre o conjunto  $\mathbb{R}$  descrito acima e uma reta. Isto mostra-nos que, nesse sentido, o conjunto  $\mathbb{R}$  é um conjunto “completo” (no mesmo sentido impreciso em que podemos pensar que a reta é um “contínuo”, sem “buracos”). Esta última propriedade é a que marca a grande diferença entre  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$ , e a que mostra porque se usa, para trabalhar com funções e modelar o mundo real, o conjunto dos números reais. Para de futuro demonstrarmos teoremas, devemos no entanto enunciar esta propriedade de forma algébrica. Para isso, necessitamos de introduzir algumas noções.

### Definição 1.2: Majorantes e Minorantes de um conjunto

Seja  $A \subset \mathbb{R}$ .

- i) A diz-se *majorado* se existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja,  $A \subseteq ]-\infty, b]$ ). Neste caso,  $b$  diz-se um *majorante* de  $A$ ;
- ii) A diz-se *minorado* se existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $x \geq a$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja,  $A \subseteq [a, +\infty[$ ). Neste caso,  $a$  diz-se um *minorante* de  $A$ ;

<sup>1</sup>De facto, se  $p = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$  for a decomposição em primos do número  $p$ , então  $p^2 = p_1^{2n_1} \dots p_m^{2n_m}$  é a decomposição em primos de  $p^2$ . Note-se que todos os expoentes são maiores ou iguais a 2 nesta última decomposição. Por outro lado, como  $p^2$  é par, então 2 é um dos primos da sua decomposição, ou seja, há um dos  $p_i$  que é igual a 2. Assim,  $p$  é par.

iii)  $A$  diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a \leq x \leq b$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja,  $A \subset [a, b]$ ).

#### Exemplo 1.3:

Os conjuntos  $[1, 3]$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $[1, 2] \cup \{3\}$  são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Conj. Majorantes} = [3, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes} = ] - \infty, 1].$$

O conjunto  $\mathbb{R}$  não é majorado nem minorado;  $\mathbb{R}^+$  é minorado mas não é majorado. Para o conjunto  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ :

$$\text{Conj. Majorantes} = [1, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes} = ] - \infty, 0].$$

Para o conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$ :

$$\text{Conj. Majorantes} = [\sqrt{2}, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes} = ] - \infty, 0].$$

#### Definição 1.4: Supremo e ínfimo de um conjunto

Seja  $A \subset \mathbb{R}$ . Define-se o *supremo* e o *ínfimo* de  $A$  como:

- $\sup A$  é o menor dos majorantes de  $A$ , se existir.
- $\inf A$  é o maior dos minorantes de  $A$ , se existir.

#### Exemplo 1.5

Para os conjuntos  $[1, 3]$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $[1, 2] \cup \{3\}$ , o supremo é 3 e o ínfimo é 1. Para o conjunto  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , o supremo é 1 e o ínfimo é 0. O conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$  tem 0 como ínfimo e  $\sqrt{2}$  como supremo. O conjunto  $\mathbb{R}^+$  tem 0 como ínfimo e não admite supremo. O conjunto  $\mathbb{R}$  não admite supremo nem ínfimo.

#### Exemplo 1.6

O número  $\pi$  (o rácio entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência) pode também ser definido como sendo o supremo do conjunto

$$\{\text{Áreas de polígonos inscritos numa circunferência de raio 1}\};$$

$e = \sup \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Pode mostrar-se que  $\pi$  e  $e$  são números irracionais. Qualquer real pode ser descrito como o supremo de um conjunto com números racionais: por exemplo,

$$0.3(3) = \sup\{0.3, 0.33, 0.333, \dots\};$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237 \dots = \sup\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}.$$

**Exercício 1.1.** Claramente,  $\inf[1, 3] = -\sup[-3, -1]$ . Em geral, dado  $A \subset \mathbb{R}$ , mostre que  $\inf A = -\sup(-A)$ , em que estamos a definir  $-A = \{-a : a \in A\}$ .

Note-se que  $\sup A$  pode ou não pertencer a  $A$ . No caso em que  $\sup A \in A$ , é claro que será o maior valor de  $A$  (é majorante...)

**Definição 1.7: Máximo e mínimo de um conjunto**

Definimos o *máximo* e *mínimo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (*se existirem*); isto é equivalente a dizer que:

- $\max A = M$  se  $M$  é majorante e  $M \in A$ ;
- $\min A = m$  se  $m$  é minorante e  $m \in A$ .

Temos sempre  $\max A = \sup A$ , se existirem.

**Exemplo 1.8**

Temos  $\max[1, 3] = 3$ ,  $\min[1, 3] = 1$ ; por outro lado, o conjunto  $]1, 3[$  não admite máximo nem mínimo. Temos  $\sup]1, 3[ = 3$ ,  $\inf]1, 3[ = 1$ ,  $\sup\{1, 2, 3\} = 3 = \max\{1, 2, 3\}$ ,  $\inf\{1, 2, 3\} = 1 = \min\{1, 2, 3\}$ .

O conjunto  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  admite máximo (1), mas não mínimo.

O conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$  não admite máximo; já o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$  tem máximo  $\sqrt{2}$ .

Estamos agora prontos para enunciar a propriedade de completude dos reais, que corresponde algebricamente ao facto da reta ser um contínuo de pontos.

**Propriedade.** (Princípio do Supremo ou da Completude). Qualquer subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  majorado e não vazio tem supremo.

Segue também que qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo (recordando, do exercício anterior, que  $\inf A = -\sup(-A)$ ).

Este princípio é equivalente a uma propriedade enunciada (mas não demonstrada) no ensino secundário: *Toda a sucessão monótona limitada é convergente*. De facto, se uma sucessão  $(u_n)$  for crescente (i.e.  $u_n \leq u_{n+1}$  para todo o  $n$ ), então o seu limite é o supremo do conjunto formado pelos seus termos, i.e.,  $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ; se a sucessão for decrescente, devemos tomar o ínfimo. Veremos mais tarde, no último capítulo destes apontamentos, os detalhes da prova desta propriedade.

Temos a seguinte caracterização do supremo e ínfimo de um conjunto, que em muitas situações é útil. Elas traduzem o facto do supremo de um conjunto ser a melhor aproximação deste por excesso, enquanto o ínfimo é a melhor aproximação por defeito.

**Proposição 1.9**

- (1)  $s = \sup A \Leftrightarrow s$  é majorante e  $]s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,
- (2)  $a = \inf A \Leftrightarrow a$  é minorante e  $[a, a + \varepsilon[ \cap A \neq \emptyset$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ .

*Demonstração.* Faremos apenas a prova para o supremo; a prova para o ínfimo segue da do supremo e do Exercício 1.1 [porquê?].

Se  $s = \sup A$  então (por definição de supremo)  $s$  é majorante de  $A$ , isto é,  $x \leq s$ , para qualquer  $x \in A$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , para ver que  $]s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$ , notamos que, se não fosse esse o caso, teríamos  $x \leq s - \varepsilon$ , para qualquer  $x \in A$ . Assim, o número  $s - \varepsilon$  seria majorante de  $A$ , o que é impossível, dado que  $s - \varepsilon < s$  e  $s$  é o menor dos majorantes.

Reciprocamente, suponhamos que  $s$  é majorante e que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $]s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$ . Vamos ver que  $s$  é necessariamente o *menor* dos majorantes: se  $t \in \mathbb{R}$  é tal que  $t < s$ , então  $]s - \frac{s-t}{2}, s] \cap A \neq \emptyset$ . Como  $t < \frac{s+t}{2}$ , existe  $x \in A$  tal que  $t < x \leq s$ . Logo  $t < x \in A$  e  $t$  não é majorante de  $A$ .  $\square$

## 1.2 Módulo. Recordemos:

**Definição 1.10**

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real  $x \in \mathbb{R}$  é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

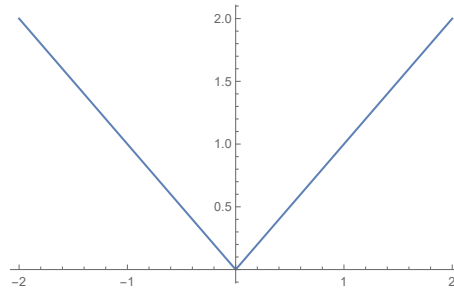


FIGURA 2. O gráfico da função  $f(x) = |x|$ .

Na interpretação geométrica dos números reais,  $|x|$  **representa a distância de  $x$  à origem da reta numérica**. Assim,  $|x - y|$  **representa a distância de  $x$  a  $y$** .



FIGURA 3. O conjunto dos pontos cuja distância a  $x = 1/4$  é menor ou igual a 1.

A prova das seguintes propriedades deve ser feita como exercício.

- (1)  $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (2)  $|-x| = |x|$ .
- (3)  $|xy| = |x||y|$ ,  $|x|^2 = |x^2| = x^2$ .
- (4)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ . (desigualdade triangular)
- (5)  $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|$ .

Para resolver inequações com módulos, é útil pensar no módulo como distância: por exemplo, a inequação  $|x| < 2$  tem como conjunto solução todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  que estão a uma distância de 0 inferior a 2, ou seja, o intervalo  $] -2, 2[$ .

Em geral: se  $R > 0$ ,

$$|x| < R \Leftrightarrow x > -R \wedge x < R \Leftrightarrow -R < x < R$$

$$|x| > R \Leftrightarrow x < -R \vee x > R.$$

Mais geralmente, com expressões algébricas tem-se:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) > -g(x) \wedge f(x) < g(x);$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x) \vee f(x) > g(x).$$

### Exemplo 1.11

:

- (1)  $|x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ .
- (2)  $|2x + 3| > 1 \Leftrightarrow 2x + 3 > 1 \vee 2x + 3 < -1 \Leftrightarrow x > -1 \vee x < -2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[$ .
- (3)  $|x - 2| < |x + 1| \Leftrightarrow x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$  dado que o conjunto solução corresponde aos pontos cuja distância a 2 é inferior ou igual á distância a -1.  
OU  $|x - 2| < |x + 1| \Leftrightarrow -|x + 1| < x - 2 < |x + 1| \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .
- (4)  $\frac{x^2 - 4}{|x + 1|} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq -1$ .
- (5)  $\frac{|x - 1| - 1}{|x| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 2$ .

Usaremos nalgumas situações a seguinte notação:

### Definição 1.12

Define-se *vizinhança de centro a e raio R > 0*,

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\} = ]a - R, a + R[$$

como os conjunto dos pontos cuja distância a a é inferior a R.

Por exemplo,  $V_1(0) = ]-1, 1[$ ,  $V_{0.1}(-1) = ]-0.9, -1.1[$ ,  $V_{\frac{1}{2}}(1) = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ .

Se estivermos a aproximar um número  $a$  por  $x$  então podemos encarar  $|x - a|$  também como o *erro absoluto* cometido na aproximação. Ao fazermos  $|x - a| < \varepsilon$ ; estamos a admitir uma margem de erro de, no máximo,  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  - *epsilon*, letra grega correspondente ao  $e$  latino, designará habitualmente uma quantidade 'pequena'). Por exemplo, para aproximarmos  $\pi$  com erro no máximo de  $10^{-2}$  queremos  $x$  tal que  $|x - \pi| < 10^{-2}$ , podemos fazer  $x = 3,14$  (por defeito) ou  $x = 3,15$  (por excesso) ou  $x = 3,1425$  (ou...)

**1.3 Método de Indução.** Suponhamos que se pretende mostrar a seguinte fórmula para a soma dos primeiros  $n + 1$  números ímpares:

$$(2) \quad \text{Para todo o } n \in \mathbb{N}, \text{ tem-se } 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Observe-se que pretendemos demonstrar tantas proposições quantos números naturais (ou seja, infinitas proposições): se  $P(n)$  for a afirmação  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ , pretendemos ver que:

$$P(1) \text{ é verdadeira (o que está correto: } 1 = 1^2)$$

$$P(2) \text{ é verdadeira (} 1 + 3 = 2^2, \text{ correto)}$$

$$P(3) \text{ é verdadeira (} 1 + 3 + 5 = 3^2, \text{ correto)}$$

$\vdots$

Claramente não podemos experimentar todos os números naturais, nem pedir a um computador que o faça. É então útil, em muitas situações práticas, o seguinte método de demonstração:

**Método de Indução Matemática.** Seja  $P(n)$  uma proposição para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que:

- (a)  $P(1)$  é verdadeira; e
  - (b) sempre que  $P(n)$  é verdadeira para *algum*  $n$ , então  $P(n+1)$  também é verdadeira.
- Então conclui-se que  $P(n)$  é verdadeira para *todo*  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Vejamos porque funciona o método: seja  $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\}$ ; pretendemos ver que  $A = \mathbb{N}$ . Ora  $1 \in A$ . Se existir  $k \notin A$  ( $k > 1$ ), então por (b) e como  $P(1)$  é verdadeira, temos que  $P(2)$  é verdadeira; novamente por (b), segue-se que  $P(3)$  é verdadeira; repetindo este passo um *número finito* de vezes, obtemos que  $P(k)$  é verdadeira, ou seja  $k \in A$ , o que é uma contradição.  $\square$

A “ $P(1)$  verdadeira” chamamos a *base de indução*. Para provar a segunda parte, assumimos que  $P(n)$  é verdadeira para dado  $n$  fixo - a esta hipótese chamamos *hipótese de indução* - e provamos que nesse caso também será verdadeira para  $n+1$ , a chamada *Tese*.

Talvez seja útil comparar o método de indução com uma *fila de peças de dominós em queda*: imaginemos uma fila de peças de dominó, em que:

- damos um empurrão à 1ª peça da fila, para que tombe para a frente;
- sempre que uma peça tomba, a seguinte também tomba.

O resultado disto é que toda a fila de peças cai. Nesta analogia, uma peça tombar no lugar  $n$  faz o papel de  $P(n)$  ser verdadeira. Outro exemplo ilustrativo: se encontrarmos uma lâmpada mágica e de lá sair um gênio, caso lhe peçamos “se estiver vivo num dia, estarei vivo no seguinte”, então teremos a vida eterna assegurada (o  $P(1)$  será estarmos vivo aquando do pedido; a parte (b) do método corresponde ao nosso pedido).

Depois destas considerações que pretendem tornar mais natural o método, apliquemo-lo de forma mais séria para demonstrar (2), mostrando também outros exemplos.

### Exemplo 1.13

Mostrar que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Se  $P(n)$  representa a igualdade acima, temos:

- $P(1)$  é verdadeira:  $1 = 1^2$ .
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado  $n$  (fixo) se tem

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

queremos provar que

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$

Mas por HI, temos

$$\underbrace{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}_{n^2} + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

como queríamos mostrar.

**Exemplo 1.14: Soma dos  $n$  primeiros naturais**

Consideremos a seguinte proposição, que queremos mostrar verdadeira para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(n) = \text{é válida a seguinte fórmula: } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.

- $P(1)$ : Mostrar que a fórmula dada é válida quando  $n = 1$ , i.e. que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

o que é claramente verdade.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : Assumindo como verdadeira a hipótese  $P(n)$ , i.e.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese  $P(n+1)$ , i.e.

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.15**

Provar que  $2^n \geq n + 1$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

- $P(1)$  é verdadeira, já que  $2^1 \geq 2$ .
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado  $n$  (fixo) se tem  $2^n \geq n + 1$  queremos provar que  $2^{n+1} \geq n + 2$ . Então, da HI,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n + 2 \geq n + 2$$

já que  $n > 0$ . Por transitividade,  $2^{n+1} \geq n + 2$ , como queríamos mostrar.

**Exercício 1.2.** Para  $a > 0$  fixo, temos a *desigualdade de Bernoulli*:

$$(1+a)^n \geq 1+na,$$

para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre esta desigualdade recorrendo ao método de indução.

**Exemplo 1.16**

Provar que  $4^n - 1$  é múltiplo de 3, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

- $P(1)$  é verdadeira, já que  $4^1 - 1 = 3$  é múltiplo de 3.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : assumindo, por hipótese de indução, que para dado  $n$  (fixo)  $4^n - 1$  é múltiplo de 3, temos

$$4^{n+1} - 1 = (1+3)4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + (4^n - 1)$$

é múltiplo de 3

**Nota 1.3.** (a) Provar que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  não é suficiente! Por exemplo, seja  $P(n)$  a afirmação  $\sin(2n\pi) = 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , que é obviamente falsa, para qualquer  $n$ . Mas é fácil ver

que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , já que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{sen}(2(n+1)\pi) = \text{sen}(2n\pi).$$

(b) Se quisermos provar uma determinada proposição apenas para  $n \geq n_0$ , começamos por verificar  $P(n_0)$  e provamos  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  como antes (é suficiente ver para  $n \geq n_0$ ).

(c) O método de indução é particularmente útil quando os termos envolvidos estão *definidos por recorrência*. Por ex.  $r^n$ ,  $n!$  podem definir-se como

$$\begin{cases} 1! = 1, \\ (n+1)! = (n+1)n!, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} r^1 = r, \\ r^{n+1} = r \cdot r^n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Exemplo 1.17: Progressão Geométrica

Imaginem que estão 10 pessoas numa sala, e a cada hora que passa o número de pessoas duplica. Se  $x_n$  designar o número de pessoas passadas  $n$  horas, temos uma sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} x_0 = 10, \\ x_{n+1} = 2x_n, \end{cases} \quad n \geq 0.$$

Calculando alguns valores *conjecturamos* que  $x_n = 10 \cdot 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Para mostrar que a nossa conjectura é verdadeira, usamos o método de indução. Seja  $P(n)$  a afirmação “ $x_n = 10 \cdot 2^n$ ”. Então:

- $P(0)$  é verdadeira:  $x(0) = 10$ .
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado  $n$  (fixo) se tem  $x_n = 10 \cdot 2^n$ , então

$$x_{n+1} = 2x_n = 2 \cdot 10 \cdot 2^n = 10 \cdot 2^{n+1}$$

logo  $P(n+1)$  também é verdadeira.

Conclui-se pelo método de indução que  $P(n)$  é verdadeira para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 1.4.** Mostrar que  $n! > 2^n$ , para  $n \geq 4$ . (Nota: Reparem que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  é válido, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , mas  $P(n)$  é falso para  $n = 1, 2, 3$ , verdadeiro para  $n = 4$ .)

**1.4 Somatórios.** Podemos escrever as somas que surgem nos Exemplo 1.13 e Exemplo 1.14 de forma mais abreviada usando *somatórios*, que serão usados ao longo do curso.

Dada uma sucessão de números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , tem-se:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

(lê-se: “somatório de 1 até  $n$  de  $a_k$ ”) ou, por recorrência:

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}.$$

Assim, no Exemplo 1.13, a igualdade aí demonstrada escreve-se:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2;$$

no Exemplo 1.14,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O símbolo  $\sum$  é um sigma grego maiúsculo, que corresponde ao  $S$  do alfabeto latino.

**Nota 1.5.** O índice  $k$  do somatório é um *índice mudo*, desempenhando um papel muito auxiliar. Uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + \dots + a_n.$$

Os extremos inferiores e superiores num somatório podem ser qualquer número. Por exemplo

$$\sum_{k=3}^{100} k^2 = 3^2 + \dots + 100^2; \quad \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) = \sum_{k=3}^{n+1} k = 3 + \dots + n + 1.$$

### Exemplo 1.18

Temos  $0.333 = \sum_{i=1}^3 \frac{3}{10^i}$ ,

$$0.(3) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{3}{10^i} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

### Proposição 1.19: Propriedades do somatório

Se  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, n$  então:

- (1)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$  (propriedade aditiva);
- (2)  $\sum_{k=1}^n (c a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$  para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$  (homogeneidade);
- (3)  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$  (propriedade telescópica).
- (4)  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$  para qualquer  $p \in \mathbb{N}$ .

Estas propriedades podem ser demonstradas usando o método de indução. Exemplificamos com a propriedade telescópica:

- $P(1)$ : temos  $\sum_{k=1}^1 (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$ .
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+2}.$$

### Exemplo 1.20: Soma dos termos de uma progressão geométrica

Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer  $r \in \mathbb{R}$  com  $r \neq 1$  e qualquer  $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

(ou seja, que  $1 + r + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  para todo o  $n \geq 0$ .) Usaremos o Método de Indução começando em  $n = 0$ .

- $P(0)$ : Mostrar que a fórmula (3) é válida quando  $n = 0$ , i.e. que

$$\sum_{k=0}^0 r^k = \frac{1-r^1}{1-r},$$

o que é claramente verdade (ambos os termos são iguais a 1).

Nota: por definição  $r^0 = 1$ .

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : Assumindo como verdadeira a hipótese  $P(n)$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0,$$

há que mostrar a validade da tese  $P(n+1)$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^n r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)} \\ &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= \frac{1-r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1-r} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}. \end{aligned}$$

### Material extra para uma melhor compreensão da distribuição dos racionais e irracionais em $\mathbb{R}$ .

Note-se desde já que, da definição do conjunto  $\mathbb{R}$  e da caracterização de  $\mathbb{Q}$  como o conjunto das dízimas finitas e periódicas, se vê imediatamente que:

#### Proposição 1.21

Sejam  $a < b$  dois números reais. Então existem  $x \in \mathbb{Q}$  e  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tais que  $x, y \in ]a, b[$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $0 \leq a < b$  (os outros casos demonstram-se de forma semelhante), com

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \quad \text{e} \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

Uma vez que  $a$  é menor que  $b$ , é possível tomar o primeiro inteiro  $m$  tal que  $\alpha_m < \beta_m$ . Seja  $n > m$  um inteiro em que  $\alpha_n \neq 9$ ; então o número

$$c = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m \dots (\alpha_n + 1) 0 \dots 0 \dots$$

é um racional que pertence ao intervalo  $]a, b[$ .

A construção de um irracional é deixada como exercício. Sugere-se começar por exemplos específicos: tomando por exemplo os conjuntos  $]0.12123123412345 \dots 0.122122122 \dots [$  e  $]0.(3), 1[$ , determinando explicitamente irracionais nestes conjuntos).  $\square$

Daqui segue imediatamente que:

- Entre quaisquer dois números reais há *infinitos* números racionais e *infinitos* números irracionais.
- Qualquer número real pode ser aproximado com erro arbitrariamente pequeno por racionais (e por irracionais também...).

(justifique; se necessário, comece por pensar em casos concretos).

### Material extra: construção axiomática dos números reais

O que vimos atrás foi uma construção, por etapas, dos números reais: começou-se por definir  $\mathbb{N}$ , com isto definiu-se  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e por fim  $\mathbb{R}$ . Note-se no entanto que na passagem de  $\mathbb{Q}$  para  $\mathbb{R}$  não demos todos os detalhes; é de facto um pormenor delicado a forma como se pode introduzir o que é verdadeiramente um número real. Há muitas formas de o fazer e, ao longo da história, tem havido várias propostas para todos os gostos, todas equivalentes (os mais interessados podem consultar [esta página](#) e/ou conversar com o professor).

Como material extra, recomendamos a leitura do método axiomático como forma de introduzir os números reais, onde se segue o caminho oposto ao que seguimos nas aulas: começa-se por definir  $\mathbb{R}$  como um conjunto onde há duas operações,  $+$  e  $\cdot$ , que verificam um certo número de propriedades. Depois disso (e apenas depois) define-se  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ . É a construção seguida pela maior parte dos livros por ser sucinta e eficaz. Para ver todos os detalhes desta abordagem, recomendamos a leitura do primeiro capítulo dos apontamentos disponíveis online [aqui](#); para uma versão resumida, recomendamos a leitura do Guia das Aulas Teóricas 1–6 [neste link](#) (da autoria do Prof. João Teixeira Pinto).