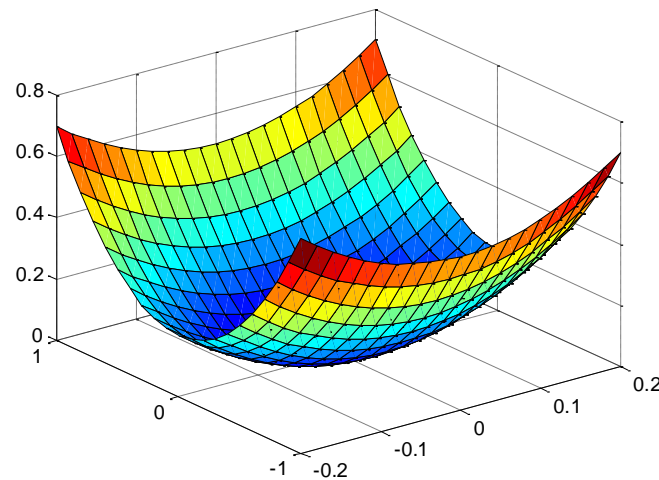


Lyapunov's Direct Method



J. Miranda Lemos

Professor Catedrático do IST

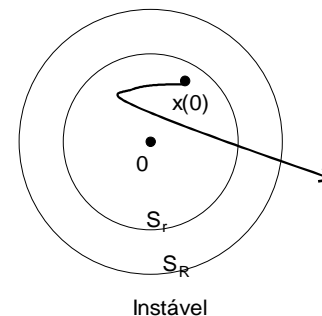
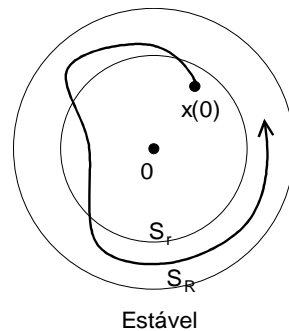
2017

Stability in the sense of Lyapunov

The equilibrium point $x = 0$ is said to be **stable** (in the sense of Lyapunov) iff

$$\forall R > 0 \exists r > 0 : \|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R \quad \forall t$$

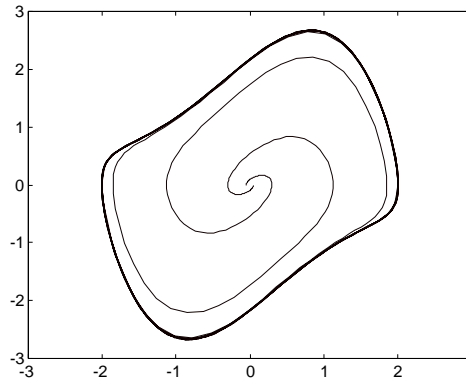
If the point is not stable, it is **unstable**.



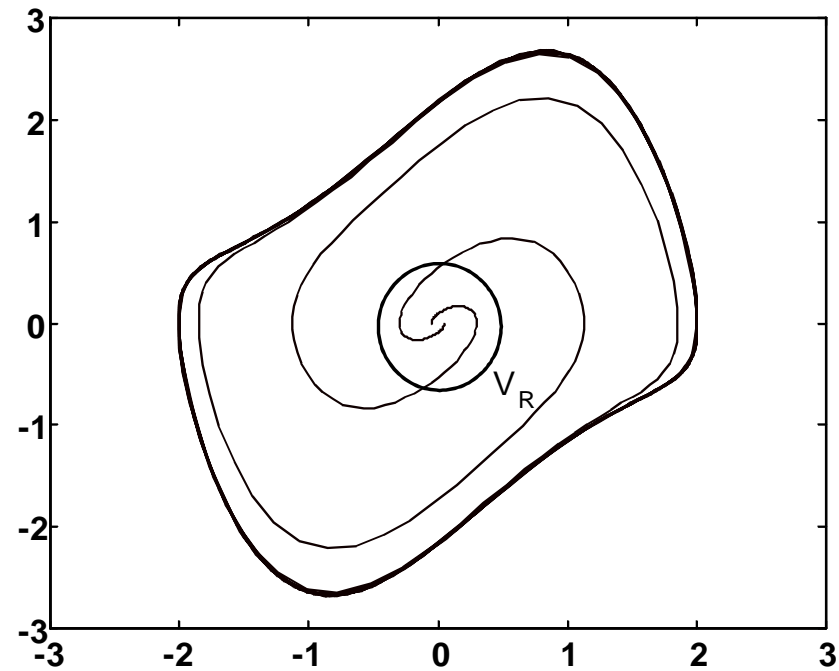
Question: Van der Pool oscillator

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = (1 - x_1^2)x_2 - x_1$$

Is the origin stable in the sense of Lyapunov?

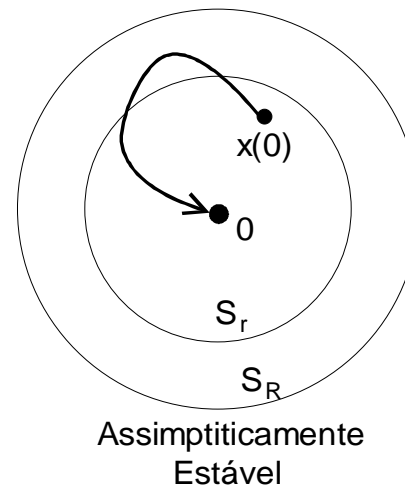


The origin is unstable



Asymptotic stability

The equilibrium point $x = 0$ is said to be **asymptotically stable** if it is stable and if, furthermore, exists $r > 0$ such that $\|x(0)\| < r$ implies $x(t) \longrightarrow 0$ when $t \longrightarrow \infty$.



If $x(t) \longrightarrow 0$ when $t \longrightarrow \infty$ for any r , then the equilibrium is said to be **globally asymptotically stable**.

Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (1857-1918) escreveu, em 1892 a memória *O Problema Geral da Estabilidade do Movimento*, que constituiu a sua tese de Doutoramento e que ainda hoje merece o interesse de uma reedição (*Int. J. Control* (1992), **55**, 3, 775-784). Neste texto, Lyapunov estabeleceu os dois métodos que têm o seu nome e que ainda hoje constituem a base e fonte de inspiração para muitos trabalhos em Controlo. O problema da estabilidade do movimento, sugerido pela estabilidade das órbitas no sistema solar, constituiu desde o sec. XVIII um tema de grande importância na Mecânica Celeste. Em 1788, Lagrange enunciou o Princípio que tem o seu nome: *Num sistema conservativo um mínimo isolado da energia potencial corresponde a um ponto de equilíbrio*. A análise de Lagrange era incompleta e foi colocada em termos mais rigorosos por Dirichlet. Em 1842 e 1855 Liouville publicou trabalhos relativos ao equilíbrio de corpos em fluídos. Na sua sequência, em 1882, Chebyshev sugeriu a Lyapunov o tema da estabilidade em fluidos, o que deu origem ao trabalho hoje conhecido como Método Directo de Lyapunov.



Positive definite functions

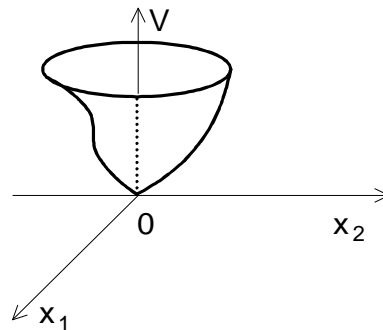
A function $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be **locally positive definite** if

$$V(0)=0$$

And if in the ball B_R , $x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$

If $V(0)=0$ and the above property holds for any x , then $V(x)$ is said to be **globally** positive definite.

The function V has an isolated minimum at the origin $x=0$.



Uma função escalar do estado contínua $V(x)$ diz-se **localmente semi-definida positiva** se

$$V(0)=0$$

e se, na bola B_R , se verificar

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) \geq 0$$

Se $V(0)=0$ e esta propriedade se verificar para todo o espaço de estado, então $V(x)$ diz-se **globalmente semi-definida positiva**.

Uma função escalar contínua $V(x)$ diz-se **(semi-) definida negativa** se $-V(x)$ for (semi-)definida positiva.

V diz-se **indefinida** se, por muito pequena que seja a bola que se tome em torno da origem, toma sempre nela valores positivos e definidos.

Alguns exemplos

- a)** $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ definida positiva
- b)** $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ semidefinida positiva
- c)** $V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ definida negativa
- d)** $V(x) = x_1x_2 + x_2^2$ indefinida
- e)** $V(x) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$ positiva definida

Formas Quadráticas

As formas quadráticas são escritas como

$$V(x) = x^T P x$$

em que $P = [p_{ij}]$ é uma matriz simétrica. Esta função é definida positiva se se verificar o **critério de Sylvester**:

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Os determinantes ditos *menores principais* devem ser positivos

Formas Quadráticas - Exemplo

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Pode ser escrita na forma

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A matriz da forma quadrática verifica o critério de Sylvester:

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 17 > 0$$

pelo que a forma quadrática é definida positiva.

Função de Lyapunov

Considere-se um sistema não linear descrito por

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

Seja $V(x)$ uma função definida positiva, com derivadas parciais contínuas, definida numa bola em torno da origem $x=0$ (suposto estado de equilíbrio). A função V diz-se uma **função de Lyapunov** se a sua derivada em ordem ao tempo ao longo de **qualquer** trajectória do sistema dentro da bola for semi-definida negativa. Quer dizer, se

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

ao longo de **qualquer trajectória do sistema**.

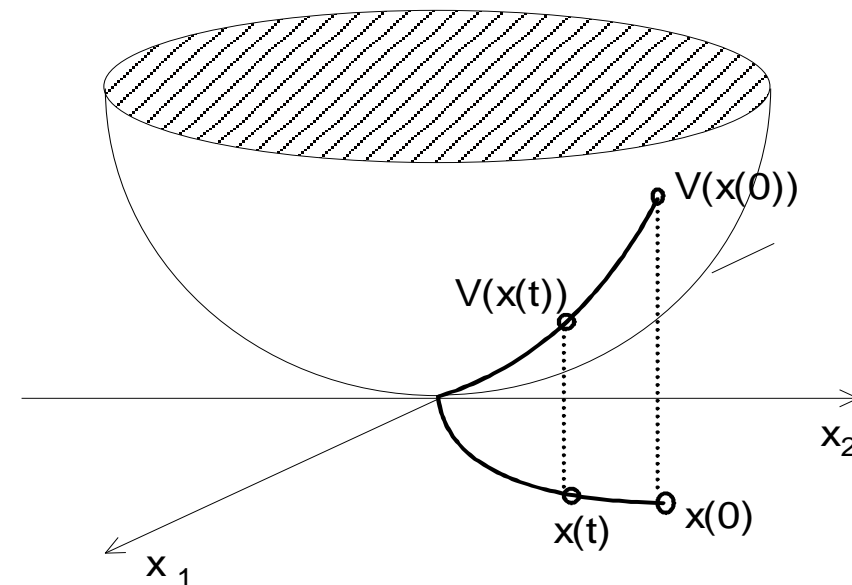
Interpretação da função de Lyapunov

Para interpretar o significado da condição imposta para que uma função definida positiva seja uma função de Lyapunov, considere-se uma condição inicial arbitrária $x(0)$ dentro da bola onde está definida a função V . A este estado inicial corresponde o valor $V(x(0))$.

À medida que o tempo passa, o estado $x(t)$ percorre uma trajetória no plano de estado.

Correspondentemente, $V(x(t))$ toma valores na superfície que define a função V .

Para que V seja função de Lyapunov é necessário que esta sucessão (contínua) de valores seja decrescente (em sentido lato).



Cálculo da derivada da função de Lyapunov

Pretende-se calcular

$$\frac{dV(x(t))}{dt}$$

ao longo das trajectórias de estado da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Tendo em conta a derivação da função composta

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

Tendo em conta que $x(t)$ satisfaz o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dt} \right) + \dots + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_n} \left(\frac{dx_n}{dt} \right)$$

\uparrow \uparrow

$$= f_1(x) \qquad = f_n(x)$$

Ou seja, *ao longo das trajectórias do sistema*, a derivada da função V é:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_n} f_n(x)$$

Teorema de Estabilidade Local de Lyapunov

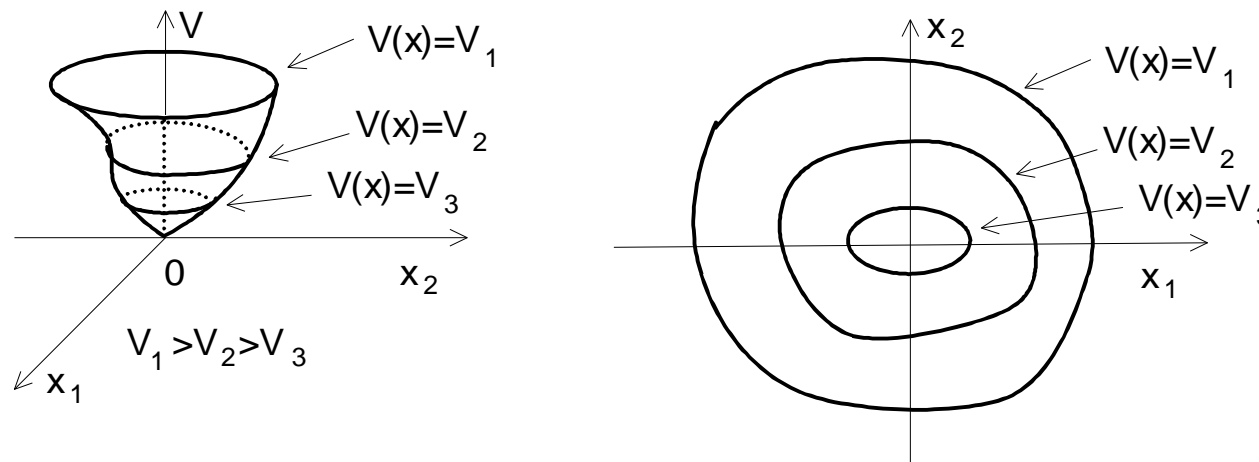
Se, numa bola B fôr definida uma função de Lyapunov $V(x)$, então o ponto de equilíbrio $x=0$ é localmente *estável* no sentido de Lyapunov.

Se a derivada de $V(x)$ ao longo das trajectórias de estado fôr definida negativa dentro da bola B :

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

ao longo das trajectórias de estado, então o equilíbrio $x=0$ é localmente *assimptoticamente estável* no sentido de Lyapunov.

Interpretação Geométrica



A função de Lyapunov pode ser interpretada como fornecendo uma “distância” à origem $x=0$. O que o Teorema de Estabilidade de Lyapunov nos diz é que esta distância generalizada não pode aumentar para que o sistema seja estável.

Exemplo 1

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_2 x_1^2$$

A origem $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio (porquê?). Para estudar a sua estabilidade, experimentemos com a candidata a função de Lyapunov

$$V\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$$

Esta função é contínua, tem derivadas parciais em ordem às componentes de x contínuas e tem um mínimo para $x=0$. Para além disso, tem de ser decrescente ao longo das trajectórias do sistema.

Tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1(-x_1 - x_1x_2^2) + 2x_2(-x_2 - x_2x_1^2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -2(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2) < 0 \quad \text{para } x \neq 0$$

Conclui-se assim que o ponto de equilíbrio $x=0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Interpretação geométrica

No exemplo anterior, a função de Lyapunov é definida por

$$V\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$$

Quando V toma o valor constante 0, é definida no espaço de estados o ponto de equilíbrio $x=0$.

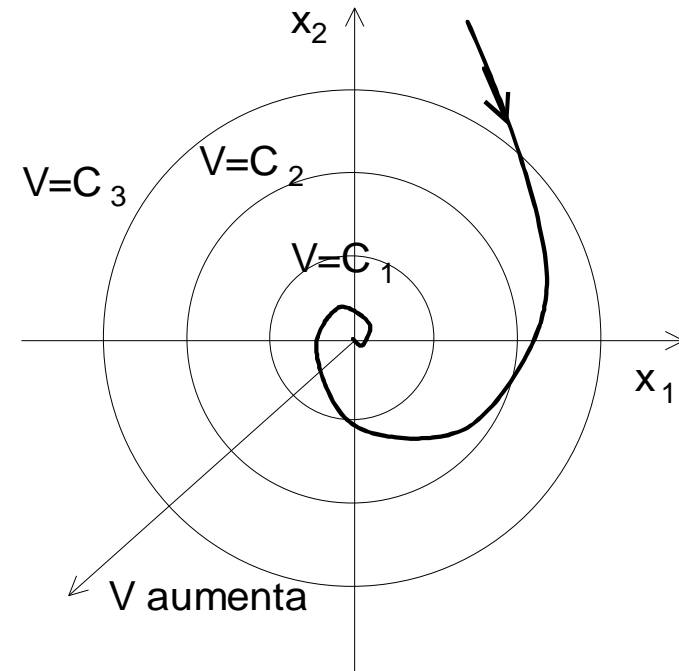
Quando V toma valores constantes sucessivamente

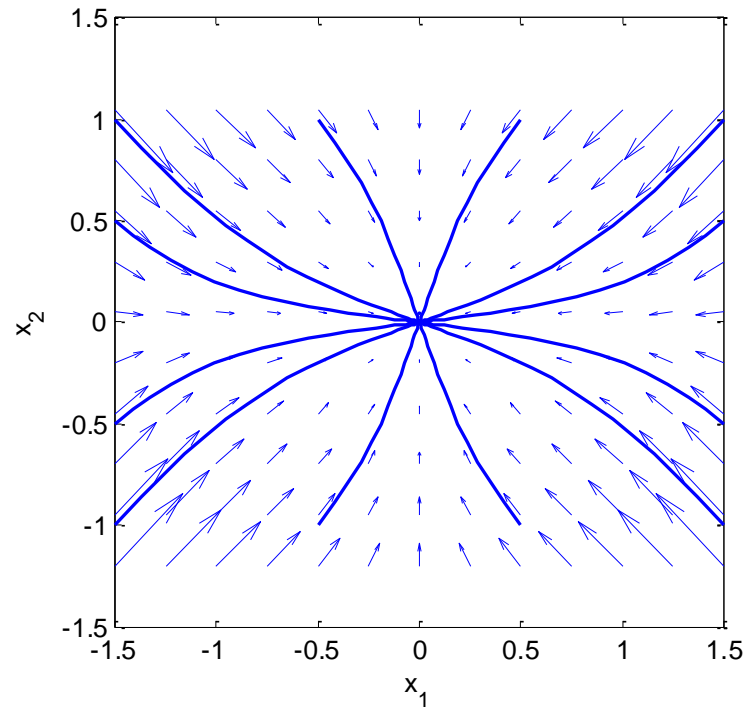
maiores, $C_1 < C_2 < C_3 < \dots$ as sucessivas equações

$V(x_1, x_2) = C_i$ definem circunferências de raio

sucessivamente maior em torno da origem.

Assim, $V(x)$ pode ser interpretado como uma medida da distância do estado x ao ponto de equilíbrio. Sendo o sistema estável, o Segundo Método de Lyapunov diz-nos que esta distância não pode aumentar. Sendo assintoticamente estável, diminui sempre.





Exemplo 1 – O campo de vectores e algumas trajectórias de estado.

Exemplo 2

O que pode dizer ácerca da estabilidade da origem de:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

Sugestão: Use como candidata a função de Lyapunov uma função da forma

$$V(x) = \frac{1}{2} (ax_1^2 + bx_2^2)$$

Selecione convenientemente os parâmetros a e b .

$$\dot{V} = ax_1(-x_1^3 + x_1x_2^2 + bx_2(-2x_1^2x_2 - x_2^3))$$

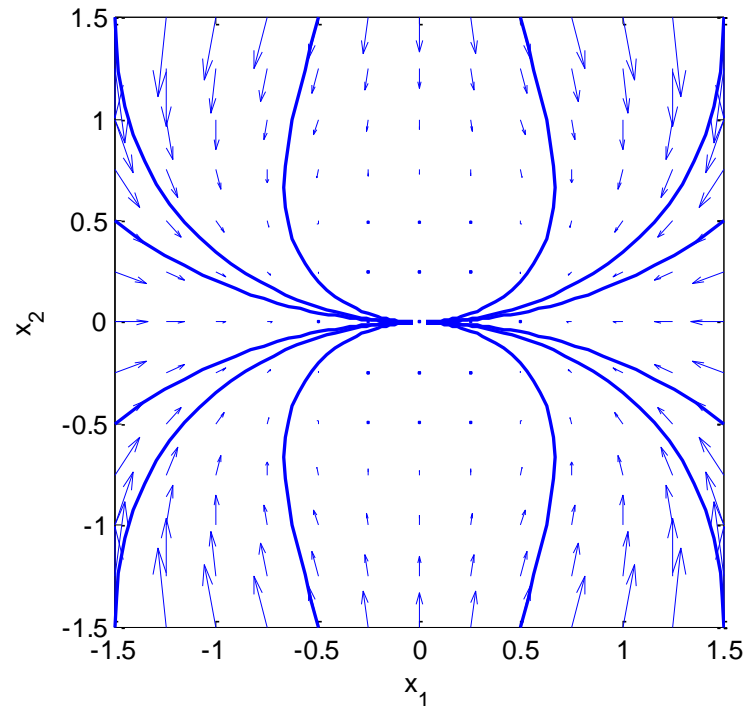
$$\dot{V} = -ax_1^4 + ax_1^2x_2^2 - 2bx_1^2x_2^2 - bx_2^4$$

$$\dot{V} = -ax_1^4 + (a - 2b)x_1^2x_2^2 - bx_2^4$$

Escolhendo $a = 2$ $b = 1$ vem

$$\dot{V} = -(x_1^4 + x_2^4) < 0 \quad \text{fora da origem}$$

Assim, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



Campo vectorial e retrato de fase em torno da origem no Exemplo 2.

Teorema de Estabilidade Global de Lyapunov

Se existir uma função V do estado x com primeiras derivadas contínuas e tal que

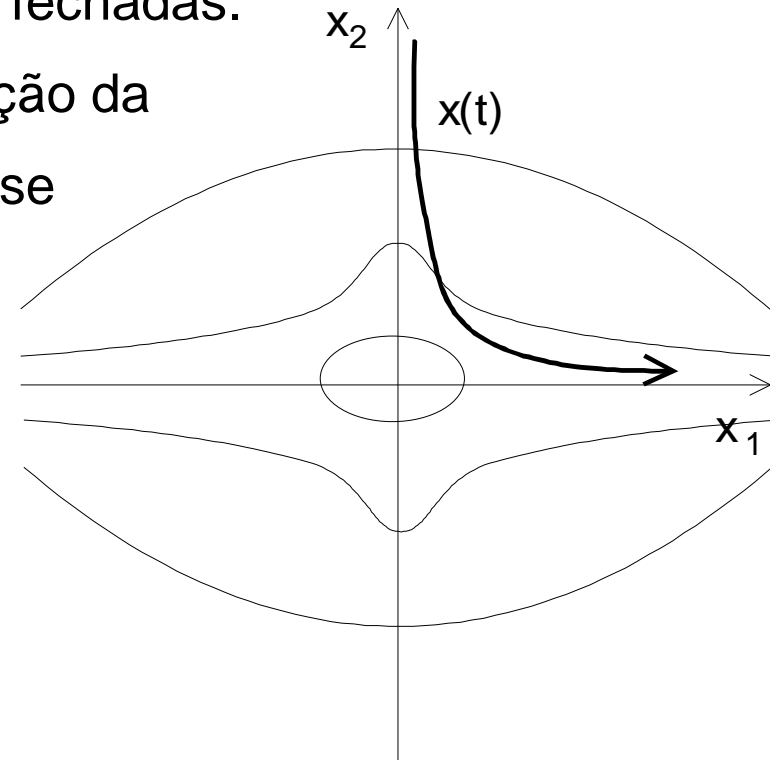
- $V(x)$ é definida positiva;
- A derivada em ordem ao tempo de $V(x)$ é definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$

então a origem $x=0$ é um ponto de equilíbrio *globalmente* assintoticamente estável.

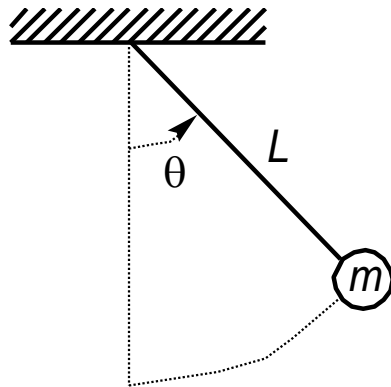
Interpretação da condição adicional para estabilidade global

A condição $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ é necessária para garantir que as curvas de nível de V correspondem a curvas fechadas.

Se assim não fosse, poderia suceder a situação da figura, em que há trajectórias de estado que se afastam cada vez mais do equilíbrio, embora por pontos onde o valor de V é progressivamente menor.



xemplo 4 – Pêndulo não amortecido



$$x_1 = \theta \quad x_2 = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

O que se pode dizer sobre a estabilidade com a seguinte candidata a função de Lyapunov (energia potencial + energia cinética)?

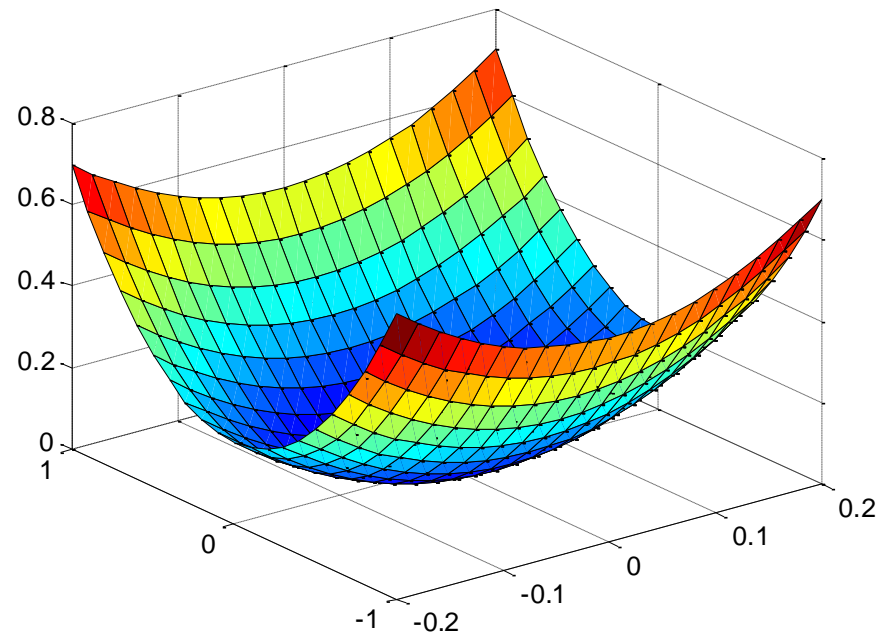
$$V(x) = mgL(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} mL^2 x_2^2$$

$$V(x) = mgL(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}mL^2 x_2^2$$

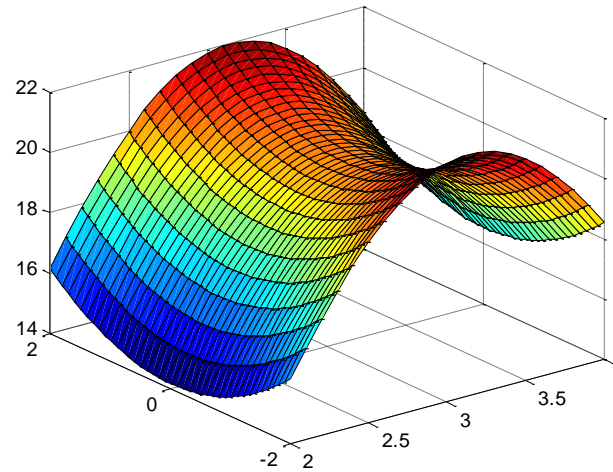
$$\dot{V} = (mgL \sin x_1) x_2 + \frac{1}{2}mL^2 2x_2 \left(-\frac{g}{L} \sin x_1 \right) = 0$$

A energia total é constante ao longo das trajectórias do sistema.

Como $\dot{V} = 0$ ao longo das trajectórias do sistema, isto sugere que a origem é estável (pelo menos), mas temos de verificar as outras condições do teorema (será que V é mesmo definida positiva?),



Aspecto da função V perto do ponto $(0,0)$. A função é definida positiva e anula-se na origem, pelo que podemos concluir que a origem é estável.

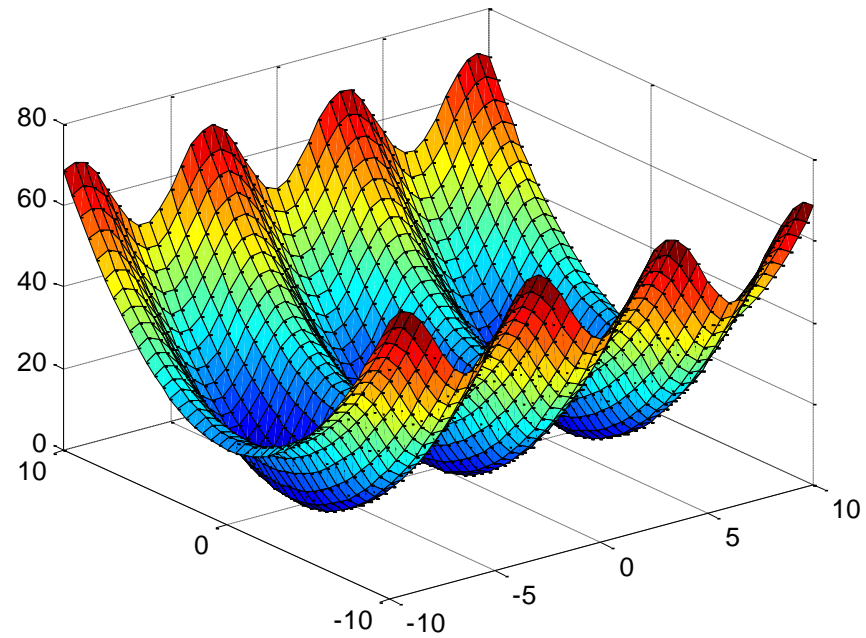


Aspecto da função V perto do ponto correspondente ao pêndulo invertido.

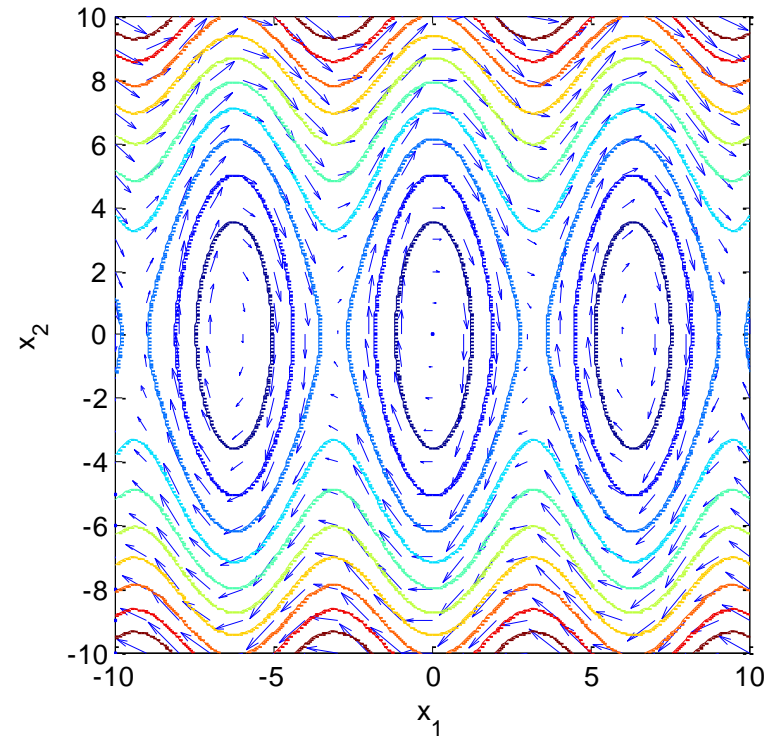
A função V é indefinida, pelo que não podemos concluir nada sobre a estabilidade deste ponto.

Repare-se que, recorrendo à linearização, tínhamos concluído que o ponto de equilíbrio correspondente ao pêndulo invertido é instável.

Não tínhamos no entanto podido concluir nada sobre a estabilidade do ponto $(0,0)$. O 2º Método de Lyapunov permitiu demonstrar que este ponto é estável.



Aspecto geral da função V



Curvas de nível da função V sobrepostas ao campo de vectores.

O suporte da função de Lyapunov construída em torno da origem não pode ser estendido a todo o espaço de estados. A estabilidade da origem é, pois local.

Como, se pode ver nas duas figuras anteriores, há múltiplos pontos (infinitos) de equilíbrio estáveis. Correspondem à posição do pêndulo “em baixo”.

Este exemplo mostra que não faz sentido falar em estabilidade de um sistema, mas apenas de um ponto de equilíbrio. No mesmo sistema podem existir diversos pontos de equilíbrio, sendo uns estáveis e outros instáveis.

Conjuntos invariantes

Um conjunto G é um **conjunto invariante** de um sistema dinâmico se qualquer trajectória do sistema que começa num ponto de G permanece em G para todos os instantes futuros.

Exemplos:

- Um ponto de equilíbrio
- Todo o espaço de estado
- Um ciclo limite

Teorema Local do Conjunto Invariante

Considere-se um sistema da forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$ com f contínua e com primeiras derivadas parciais contínuas, e seja $V(x)$ uma função escalar com primeiras derivadas parciais contínuas. Suponha-se que

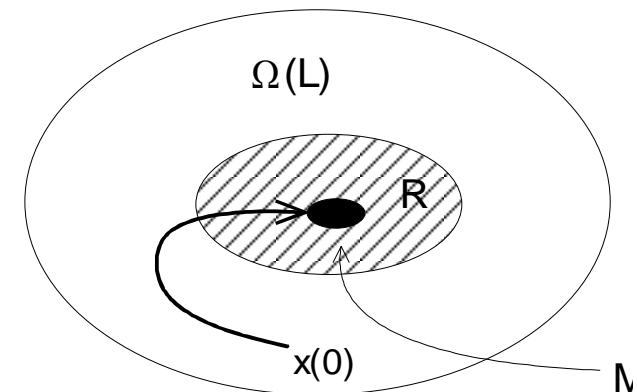
- Existe L tal que a região $\Omega(L)$ definida por $V(x) < \Omega(L)$ é limitada;
- A função $V(x)$ é tal que

$$\frac{dV}{dt}(x) \leq 0$$

para todo o x em $\Omega(L)$.

Seja R o conjunto dos pontos em que $\frac{dV}{dt}(x) = 0$ e M o maior conjunto invariante de R .

Então, toda a solução $x(t)$ iniciada em $\Omega(L)$ tende para M quando $t \rightarrow \infty$.



No teorema anterior, a expressão *maior conjunto invariante em R* significa a união de todos os conjuntos invariantes (por exemplo, pontos de equilíbrio ou ciclos limites) em R .

Em particular, se o conjunto R for ele próprio invariante, isto é, se quando $dV/dt = 0$ para um dado t então $dV/dt = 0$ para todos os instantes futuros, então $M=R$.

É relativamente a esta situação que iremos usar posteriormente este teorema.

Teorema Global do Conjunto Invariante

Considere-se um sistema da forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$ com f contínua e com primeiras derivadas parciais contínuas, e seja $V(x)$ uma função escalar com primeiras derivadas parciais contínuas. Suponha-se que

- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$
- A função $V(x)$ é tal que $\frac{dV}{dt}(x) < 0$ em todo o espaço de estado.

Seja R o conjunto em que $\frac{dV}{dt}(x) = 0$ e M o maior conjunto invariante de R .

Então, todas as soluções convergem globalmente assintoticamente para M quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 5

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1x_2^2 \end{cases}$$

Tomando como candidata a função de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

diga o que pode concluir pela aplicação:

- a) Do Teorema de estabilidade de Lyapunov
- b) Do Teorema do Conjunto Invariante

$$\dot{V} = x_1(-x_1^3 + 2x_2^3) + x_2(-2x_1x_2^2)$$

$$\dot{V} = -x_1^4 \leq 0$$

A aplicação do Teorema de Estabilidade de Lyapunov garante que a origem é um ponto de equilíbrio estável, pelo menos.

Será que é assintoticamente estável?

Para ter a resposta vamos aplicar o Teorema do conjunto invariante.

O Teorema do conjunto invariante diz que (sob certas condições) todas as trajectórias tendem para o maior conjunto invariante contido no conjunto em

que $\frac{dV}{dt} = 0$. Como, neste caso

$$\dot{V} = -x_1^4$$

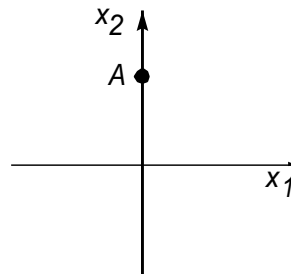
o conjunto em que $\frac{dV}{dt} = 0$ é o conjunto em que $-x_1^4 = 0$, ou seja, $x_1 = 0$.

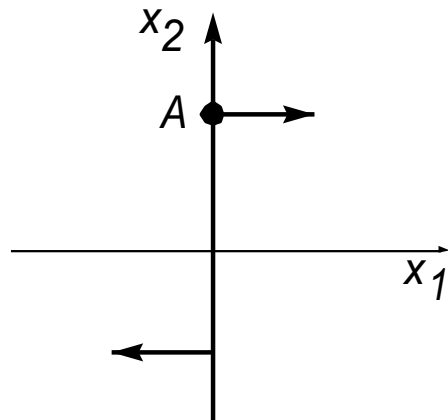
O conjunto em que $\frac{dV}{dt} = 0$ é pois, neste caso, o eixo x_2 .

Para determinar o maior conjunto invariante de

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1x_2^2 \end{cases}$$

contido no eixo x_2 , tome-se um ponto arbitrário, por exemplo A. Será que pertence a um conjunto invariante contido no eixo x_2 ?





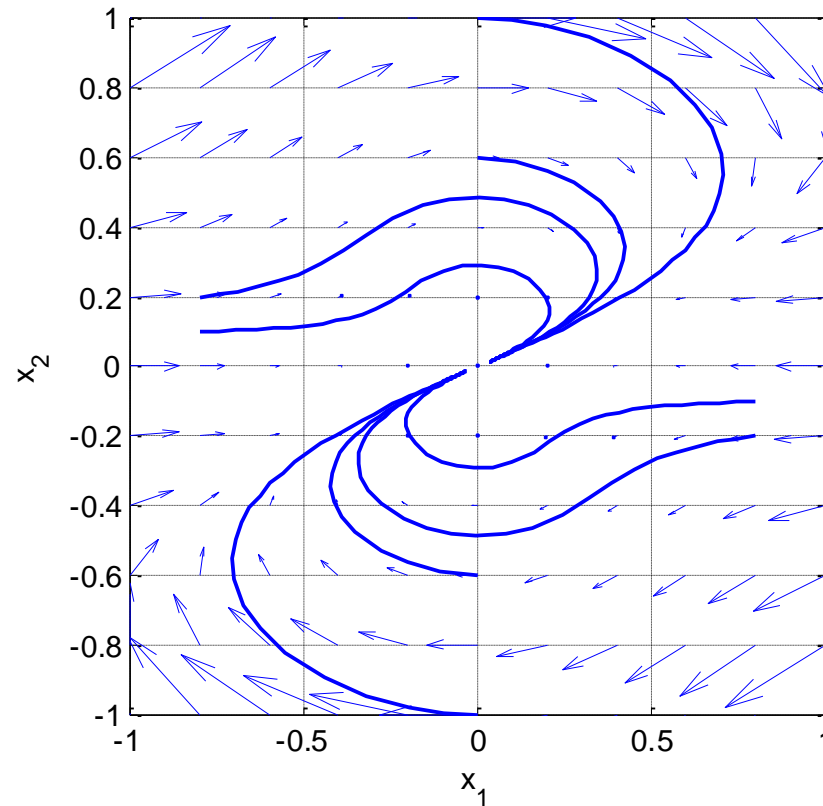
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1x_2^2 \end{cases}$$

No ponto A , $x_1 = 0$ pelo que, neste ponto, $\dot{x}_1 = 2x_2^3$ e $\dot{x}_2 = 0$. Assim, no ponto A , x_2 fica constante e x_1 aumenta, pelo que o estado se vai deslocar no sentido da seta, saindo do conjunto em que $x_1 = 0$. Assim, A **não** pode pertencer a um conjunto invariante contido no eixo vertical.

Conclui-se assim que o maior conjunto invariante contido no eixo vertical é a origem $(0, 0)$.

Pelo Teorema do Conjunto Invariante, todas trajectórias se aproximam assim de $(0,0)$ (maior conjunto invariante contido no conjunto em que $\dot{V} = 0$).

A origem é assim um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



Exemplo 4 – Campo vectorial e retrato de fase.

Análise da estabilidade de SLITs

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \quad \dim(x) = n \quad A \text{ não singular}$$

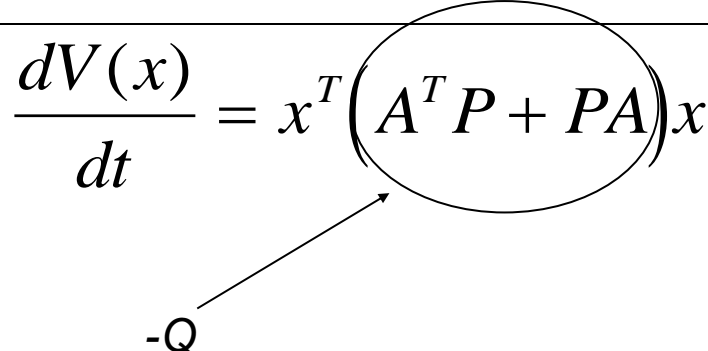
Por forma a descobrir uma função de Lyapunov, ensaia-se a forma quadrática

$$V(x) = x^T P x$$

em que P é uma matriz simétrica definida positiva (porquê?).

A derivada em ordem ao tempo da candidata a função de Lyapunov V ao longo das trajectórias do sistema é

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \frac{d}{dt} (x^T P x) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^T P x + x^T P \frac{dx}{dt} = \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) x \end{aligned}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^T (A^T P + PA) x$$


The diagram shows the term $(A^T P + PA)$ in the equation circled. An arrow points from this circled term down to the label $-Q$.

Para que a função V seja decrescente ao longo das trajetórias de estado do sistema (sendo por conseguinte o sistema assintoticamente estável), a matriz Q dada por:

$$-Q = A^T P + PA$$

tem de ser definida positiva.

A afirmação conversã também é verdadeira:

Se o sistema $\frac{dx}{dt} = Ax$ é assintoticamente estável, então, dada Q , simétrica e definida poositiva **qualquer**, a equação (dita *equação de Lyapunov*)

$$-Q = A^T P + PA$$

admite uma solução P simétrica e definida postiva.

Em particular, podemos fazer $Q = I$ para simplificar os cálculos.

Nota: A demonstração de que se existe solução simétrica e definida positiva para um dado Q então existe para *qualquer* Q , simétrica e definida positiva, embora simples, não é trivial.

Função de Lyapunov de um SLIT - Exemplo

Dado o SLIT

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

pretende-se mostrar que é assintoticamente estável.

De acordo com o exposto, o sistema será assintoticamente estável se a equação de Lyapunov

$$-Q = A^T P + PA$$

tiver solução definida positiva.

Para resolver a equação de Lyapunov, usa-se o *método dos coeficientes indeterminados*.

A equação de Lyapunov é neste caso

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Simplificando ambos os membros e igualando os coeficientes correspondentes, obtém-se

$$\begin{cases} -1 = -4p_{12} \\ 0 = -2p_{22} + p_{11} - 3p_{12} \\ -1 = 2p_{12} - 6p_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} p_{11} = 5/4 \\ p_{12} = 1/4 \\ p_{22} = 1/4 \end{cases}$$

A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

é definida positiva pois (critério de Sylvester)

$$5/4 > 0 \quad |P| = 1/4 > 0$$

O sistema é portanto *assimptoticamente estável*.

5. Controladores para sistemas não lineares

Objectivo: Introdução a técnicas de projecto para controladores de sistemas não lineares: *Control Lyapunov Function*. Introdução ao Controlo Adaptativo.

O Método Directo de Lyapunov (ou 2º Método de Lyapunov) é uma técnica que permite estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear sem entrada. Pode ser usado para o projecto de controladores da seguinte forma:

- Admite-se uma estrutura para as equações do controlador, sendo necessário escolher parâmetros (que podem ser funções do tempo).
- Em conjunto, o sistema e o controlador passam a ser um sistema autónomo (sem entrada externa), dado que o controlador impõe a entrada do sistema e o sistema impõe a entrada do controlador (realimentação)

- Escolhe-se uma candidata a função de Lyapunov, sendo escolhidos os parâmetros do controlador (ou as suas equações de estado) por forma a que se verifiquem as condições do Teorema de Estabilidade de Lyapunov.

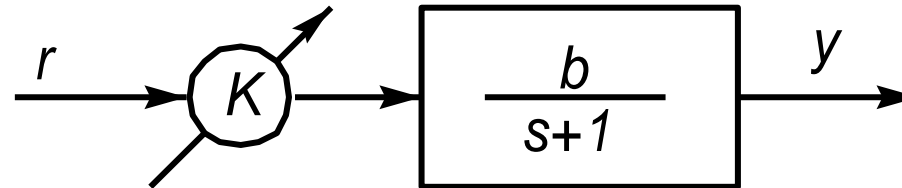
A esta função de Lyapunov dá-se o nome de *Control Lyapunov Function* (CLF).

Os exemplos seguintes ilustram esta técnica em situações muito simples. No segundo caso, embora usando simplificações, a técnica permite obter um controlador que pode ser aplicado a um sistema real (campo de colectores solares distribuídos).

O primeiro exemplo embora muito simples, pode ser motivado pela optimização da potência consumida num telemóvel quando a sua posição varia em relação à antena emissora.

Faz-se no entanto notar que, numa situação real, as equações seriam mais complexas, embora as técnicas ilustradas continuem a ser aplicadas (com mais elementos que não se estudam neste curso).

Controlo Adaptativo – Ajuste de um ganho antecipativo



$$\dot{y} = -y + bKr$$

O parâmetro b é desconhecido. Sabe-se que $b > 0$.

Problema: Ajustar o ganho K por forma a que a relação entre r e y (o chamado “modelo de referência”) seja:

$$\dot{y}_m = -y_m + r$$

a) Obtenha uma equação (dita “equação de erro”) que relaciona o erro de seguimento

$$e := y - y_m$$

com o erro na estimativa de K definido por:

$$\tilde{K} := K - K^* \quad K^* := \frac{1}{b}$$

em que K^* é o valor do ganho que cumpre a especificação (desconhecido!).

Sugestão: Derive e . Observe que $\dot{y}_m = -y_m + bK^* r$.

b) Determine uma lei de ajuste de K por forma a que

$$V(e, \tilde{K}) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{K}^2 \right) \quad \gamma > 0 \text{ constante}$$

seja uma função de Lyapunov.

Sugestão: Sendo b uma constante: $\dot{\tilde{K}} = \dot{K}$. O estado é formado por duas variáveis (e e \tilde{K}). Já temos uma equação diferencial para e . A equação diferencial para \tilde{K} pode ser escolhida por nós (é a lei de ajuste de K). Vamos escolhê-la por forma a que V seja uma função de Lyapunov.

- c) O Teorema do Conjunto Invariante diz que o estado tende para o maior conjunto invariante contido no conjunto em que \dot{V} é zero. O que pode concluir daqui?
- d) Será que, no limite $K = K^*$? Observe as equações de estado do sistema controlado (em e e \tilde{K}).
- e) Desenhe um diagrama de blocos do sistema.

Dereivando $e = y - y_m$ obtém-se: $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m$

$$\dot{y} = -y + bKr$$

$$\dot{y}_m = -y_m + bK^*r$$

Subtraindo estas equações:

$$\dot{y} - \dot{y}_m = -(y - y_m) + b(K - K^*)r$$

Ou seja, pela definição de $e := y - y_m$ e $\tilde{K} := K - K^*$, obtém-se a **equação de erro**:

$$\dot{e} = -e + b\tilde{K}r$$

$$V(e, \tilde{K}) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{K}^2 \right)$$

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma} \tilde{K}\dot{\tilde{K}} = e(-e + b\tilde{K}r) + \frac{1}{\gamma} \tilde{K}\dot{\tilde{K}} = -e^2 + \left(ber + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{K}} \right) \tilde{K}$$

Escolhe-se $\dot{\tilde{K}}$ por forma a que o termo entre parêntesis se anule

$$\dot{\tilde{K}} = -\gamma ber \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = -e^2 \leq 0$$

$$\dot{K} = -\gamma b e r \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = -e^2 \leq 0$$

Como γ é arbitrário, podemos substituir o produto γb por γ . A única condição é que $b > 0$. **Lei de adaptação:** $\dot{K} = -\gamma e r$

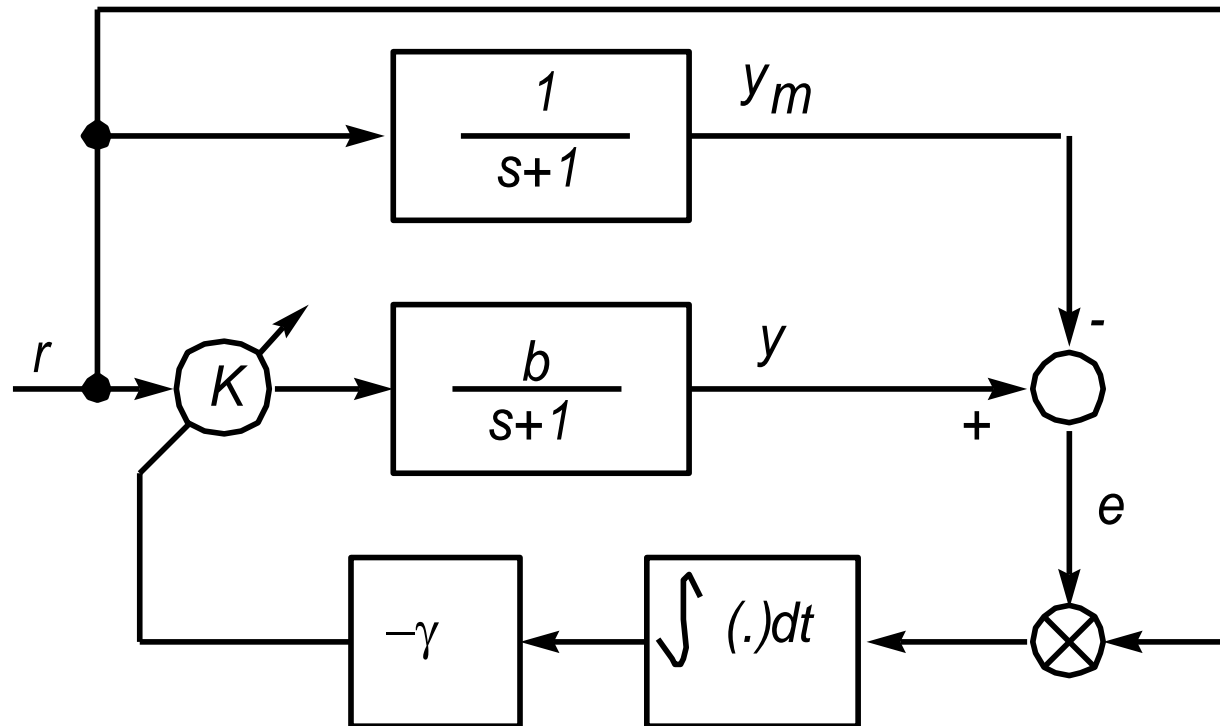
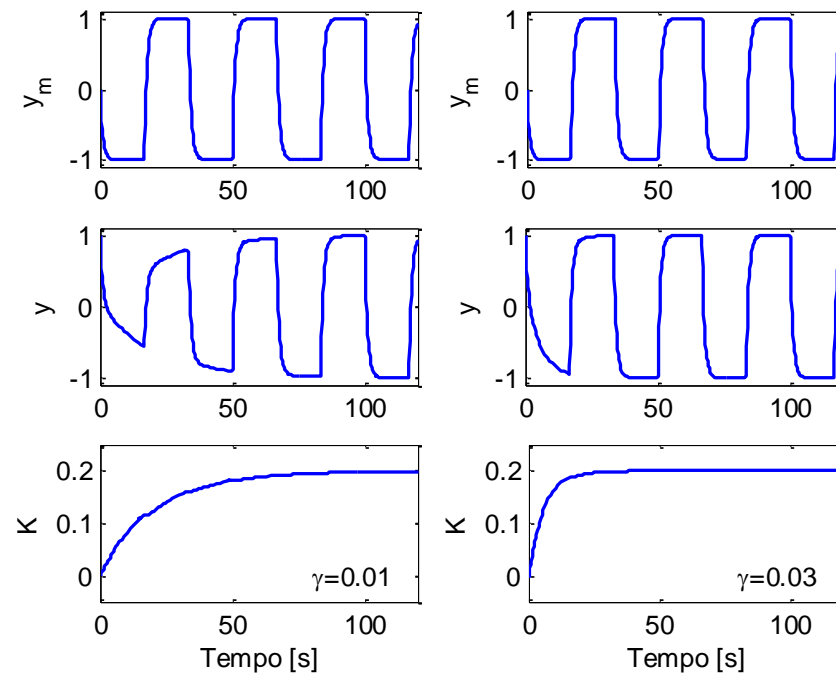


Diagrama de blocos do controlador adaptativo



Simulação com dois valores do ganho de adaptação γ

$$\dot{V} = -e^2 \leq 0$$

A aplicação do Teorema do Conjunto Invariante permite concluir que todas as trajectórias se aproximam de um conjunto de estados que corresponde ao maior conjunto invariante em que $\dot{V} = 0$, ou seja em que $-e^2 = 0$. Assim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{ou seja} \quad y(t) \rightarrow y_m(t)$$

Repare-se que o maior conjunto invariante contido no conjunto de estados em que $\dot{V} = 0$ é não vazio. Possui pelo menos a origem, que é um ponto de equilíbrio de

$$\dot{e} = -e + b\tilde{K}r$$

$$\dot{\tilde{K}} = -\gamma er$$

Mas repare-se que pode haver mais pontos. Nestes, $e = 0$ e $\tilde{K} \neq 0$. Quer dizer: O erro de seguimento e pode aproximar-se de zero sem que a estimativa dos parâmetros esteja correcta. Isto sucede por vezes no Controlo Adaptativo.

$$\dot{e} = -e + b\tilde{K}r \quad \dot{\tilde{K}} = -\gamma er$$

No conjunto caracterizado por $e = 0$ as equações (sistema+controlador) assumem a forma

$$\dot{e} = b\tilde{K}r \quad \dot{\tilde{K}} = 0$$

Da segunda equação conclui-se que o erro na estimativa é constante. Assim:

$$e(t) = b\tilde{K} \int_0^t r(\tau) d\tau$$

$$e(t) = b\tilde{K} \int_0^t r(\tau) d\tau = 0$$

A condição $\int_0^t r(\tau) d\tau \neq 0$ (por exemplo se $r = \text{Const.} \neq 0$) implica um erro de estimação nulo, $\tilde{K} = 0$.

Condições deste tipo, que garantem que a referência excita suficientemente o sistema por forma a garantir que os parâmetros possam ser correctamente estimados, denominam-se *condições de excitação persistente*. De um modo geral são mais difíceis de deduzir.

Controlo adaptativo de um campo de colectores solares distribuídos



Visão geral do campo ACUREX de colectores solares distribuídos.

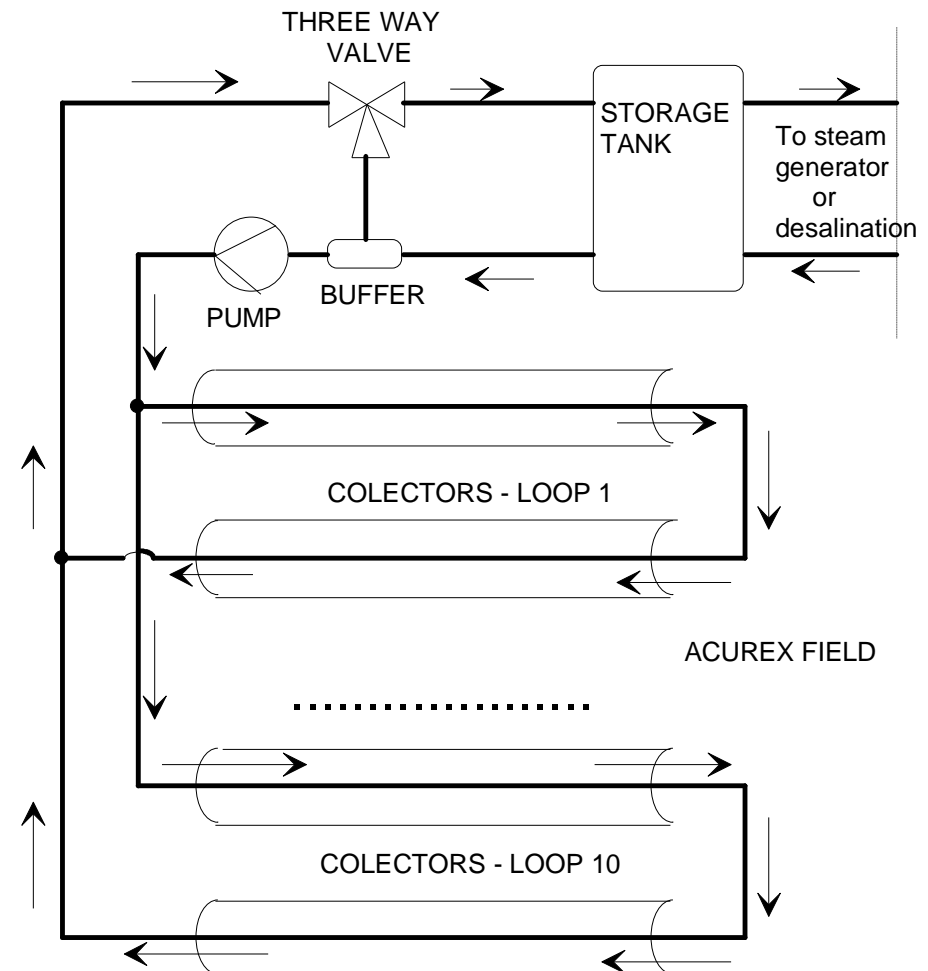
O campo ACUREX considerado situa-se na Plataforma Solar de Almeria (PSA – sul de Espanha). O seu objectivo consiste em recolher energia solar e armazená-la na forma de energia térmica num óleo.

Consiste em 20 filas de espelhos parabólicos colecores, orientados na direcção este-oeste, e organizados em 10 laços. A elevação dos espelhos é controlada automaticamente por forma a seguir o sol durante o dia.

No foco dos espelhos passa um tubo metálico (no interior de um tubo de vidro para obter efeito de estufa), dentro do qual circula o óleo.

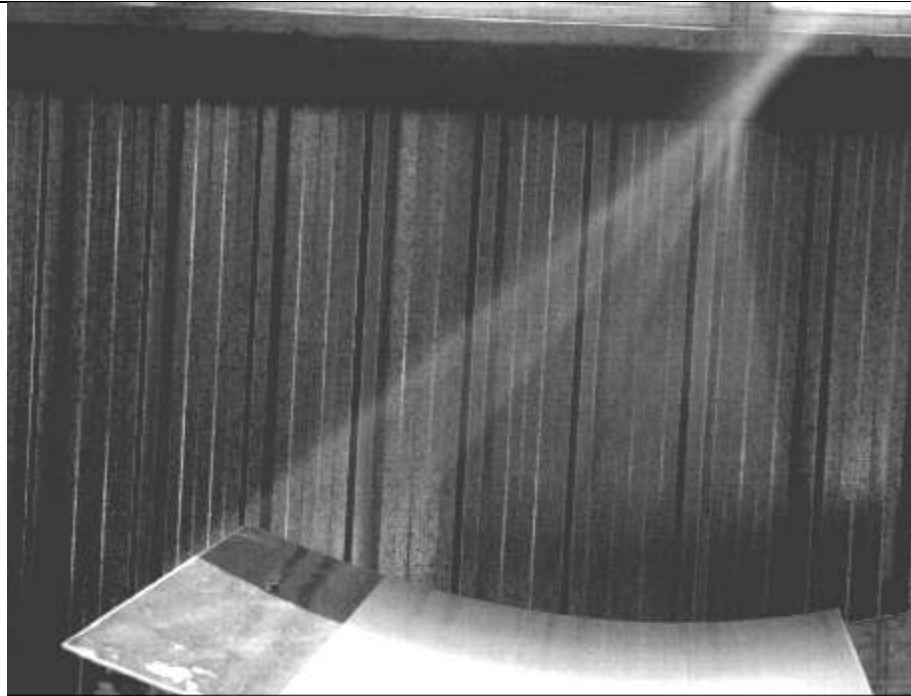
O óleo é extraído da base do tanque de armazenamento, passa através dos laços de colectores onde é aquecido e retorna ao topo do tanque.

A bomba tem um PID para controlo de caudal, que permite impor a referência de caudal.





Vista dos colectores com o tubo e os sensors usados para seguir a elevação do sol. O tanque de armazenamento do óleo pode ser visto ao fundo.

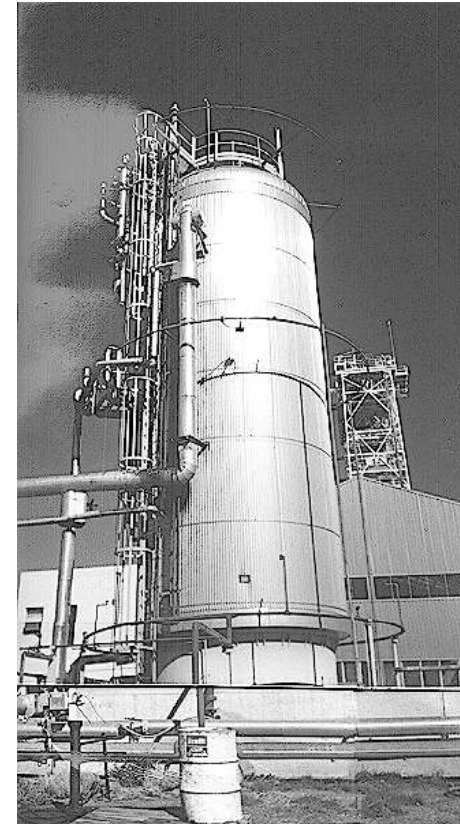


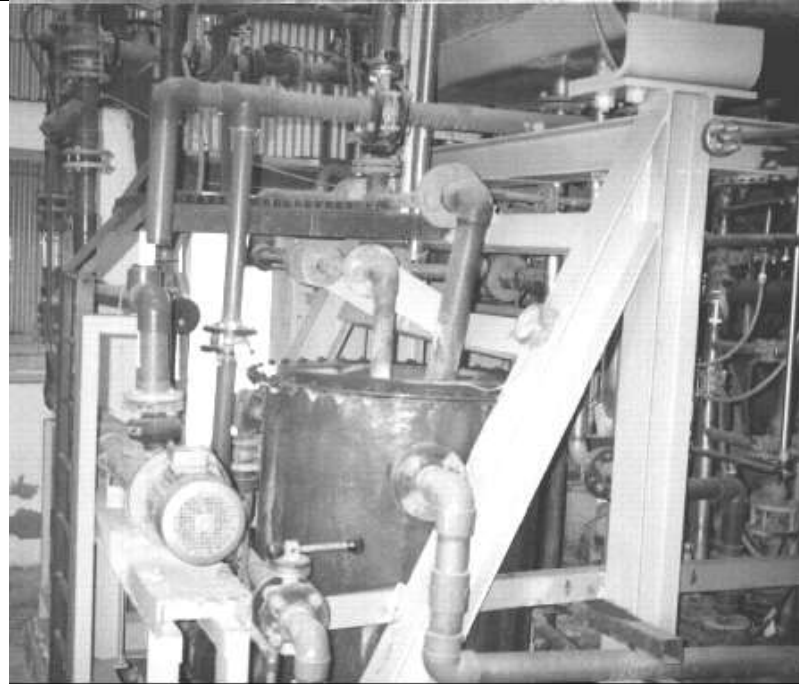
Um espelho concentrador na oficina. Podem ver-se os raios solares concentrados aproximadamente num ponto.

A energia é armazenada na forma térmica dentro do tanque.

Dado que o coeficiente de difusão do óleo é muito pequeno, as camadas frias e quentes do óleo não se misturam. É assim possível criar um perfil de temperatura dentro do tanque.

A energia térmica armazenada dentro do tanque pode ser usada numa instalação de dessalinização.





A instalação de dessalinização. O óleo quente é extraído da base do tanque de armazenamento e usado como fonte de energia. Isto é visto como uma “carga” (perturbação) aplicada ao campo

Modelo do campo (equação às derivadas parciais):

$$\frac{\partial}{\partial t} T(z, t) = -u(t) \frac{\partial}{\partial z} T(z, t) + \alpha R(t)$$

Deslocamento do óleo

Aquecimento solar

$T(z, t)$ temperature ao longo do tubo

$u(t)$ caudal de óleo (variável manipulada)

$R(t)$ radiação solar (perturbação acessível)

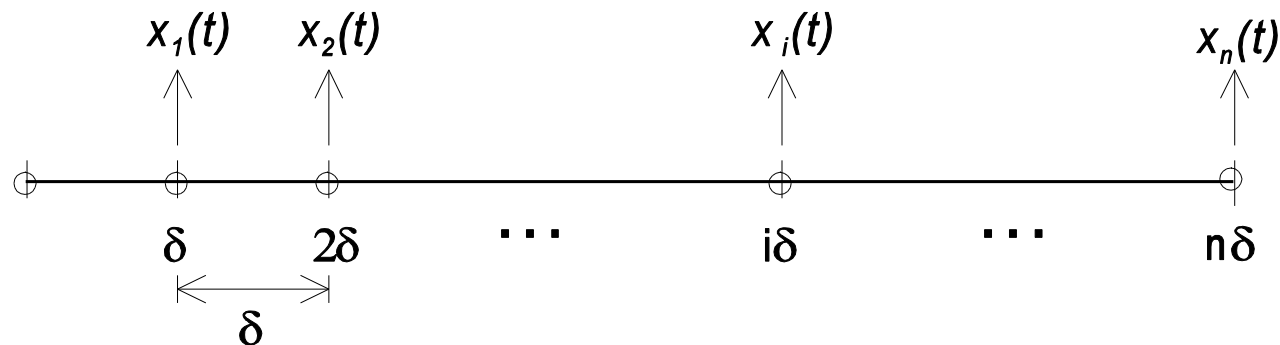
Tomando como variável manipulada o caudal, este sistema é não linear dado que há uma multiplicação entre a variável manipulada e o estado (função que descreve a temperatura ao longo do espaço e no tempo).

A principal fonte de incerteza é o conhecimento do coeficiente de reflexão dos espelhos, α . Vamos projectar um controlador que:

1. Compensa a não linearidade exactamente através de uma transformação da variável manipulada;
2. Faz uma realimentação linear do estado (que neste caso é a saída apenas) para a nova variável manipulada
3. Adapta a lei de controlo através do ajuste da estimativa de α garantindo a estabilidade com base numa função de Lyapunov.

Aproximação por um modelo de estado de dimensão finita

Variáveis de estado: Temperaturas nos nós de uma grelha ao longo do tubo:



$$\frac{dx_i}{dt} = -u(t) \frac{1}{\delta} (x_i(t) - x_{i-1}(t-1)) + \alpha R(t) \quad i = 1, \dots, n$$

$$y(t) = x_n(t)$$

Um modelo simples (apenas 1 troço):

$$\frac{dy}{dt} = -u(y - y_0) \frac{1}{L} + \alpha R$$

Defina-se uma variável de controlo virtual v por

$$v = -u(y - y_0) \frac{1}{L} + \hat{\alpha} R$$

$$u = \frac{\hat{\alpha} R - v}{y - y_0}$$

Nesta equação:

- α é o coeficiente de reflexão dos espelhos dos concentradores
- $\hat{\alpha}$ é a estimativa de α
- y é a temperatura do óleo à saída do tubo, depois de passar pelos concentradores (variável de saída do processo)
- y_o é a temperatura do óleo à entrada do tubo, antes de ser aquecido (perturbação que se pode medir)
- L é o comprimento do tubo
- u é o caudal de óleo (variável manipulada)
- R é a radiação solar (perturbação que se pode medir)

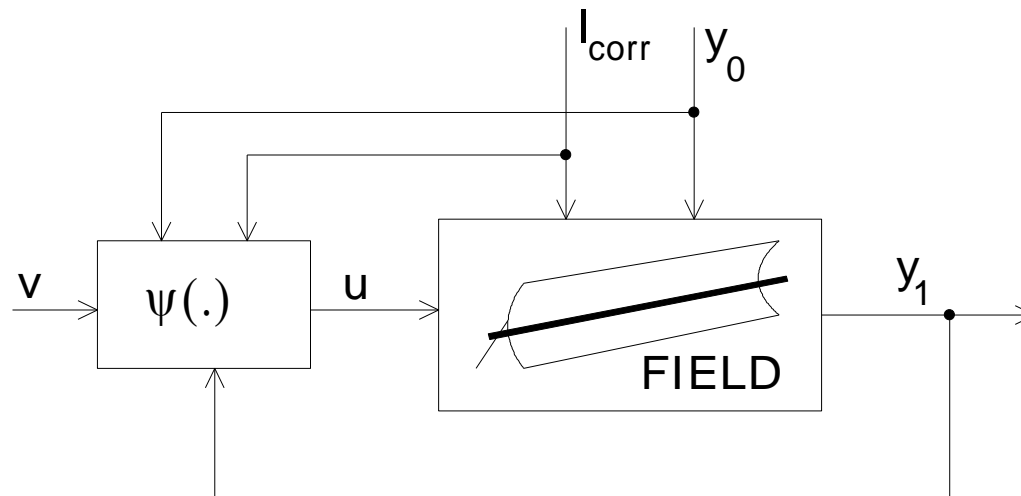
$$v = -u(y - y_0) \frac{1}{L} + \hat{\alpha}R$$

Com esta definição da variável v , o modelo escreve-se

$$\frac{dy}{dt} = -u(y - y_0) \frac{1}{L} + (\hat{\alpha} + \tilde{\alpha})R \quad \tilde{\alpha} := \alpha - \hat{\alpha}$$

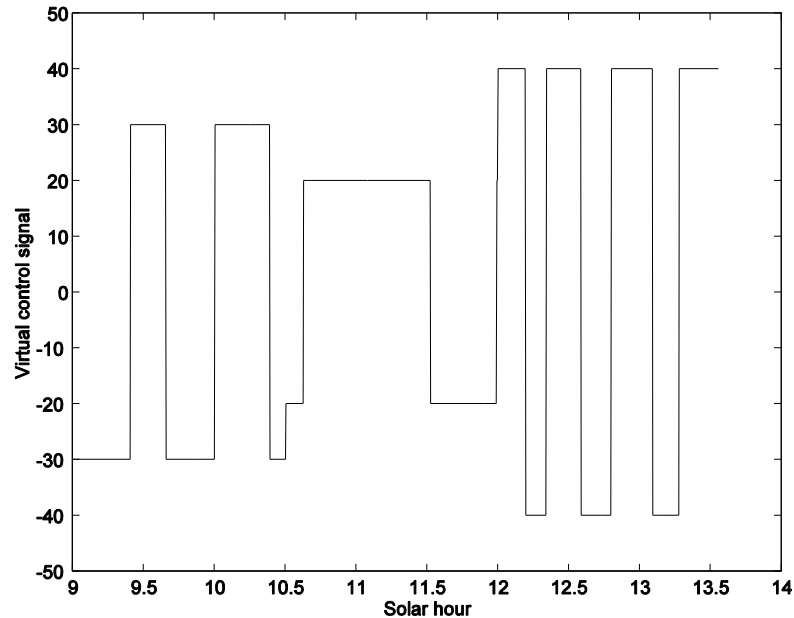
$$\frac{dy}{dt} = v + \tilde{\alpha}R$$

ou seja, entre v e y é um integrador perturbado pelo erro no conhecimento do parâmetro α (coeficiente de reflexão dos concentradores). Se $\tilde{\alpha}$, é **exactamente** um integrador.

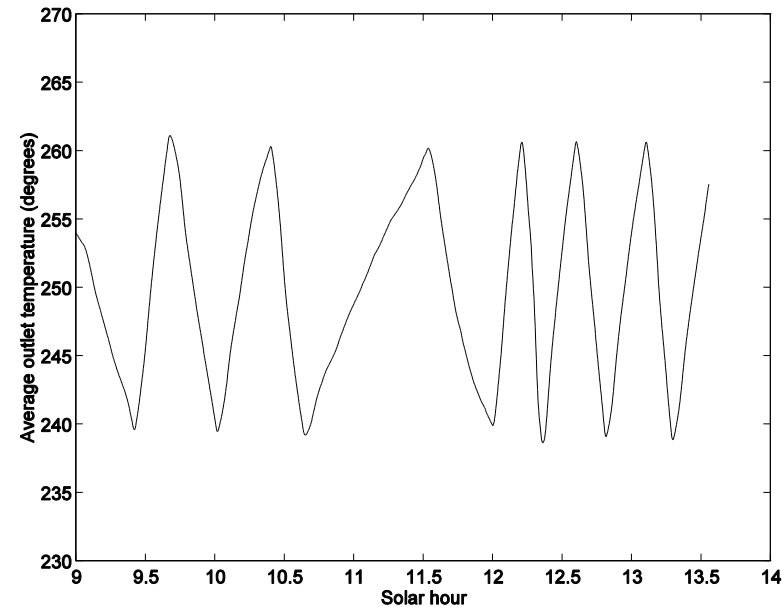


A função ψ permite calcular o caudal u do óleo para que, entre v e y o sistema se comporte como um integrador (mau grado a existência das perturbações e a não linearidade). A esta técnica chama-se **Linearização Exacta por Realimentação**. Repare-se que não tem nada a ver com a linearização Jacobiana usada para aproximar um sistema não linear.

Resultados experimentais: Linearização por realimentação



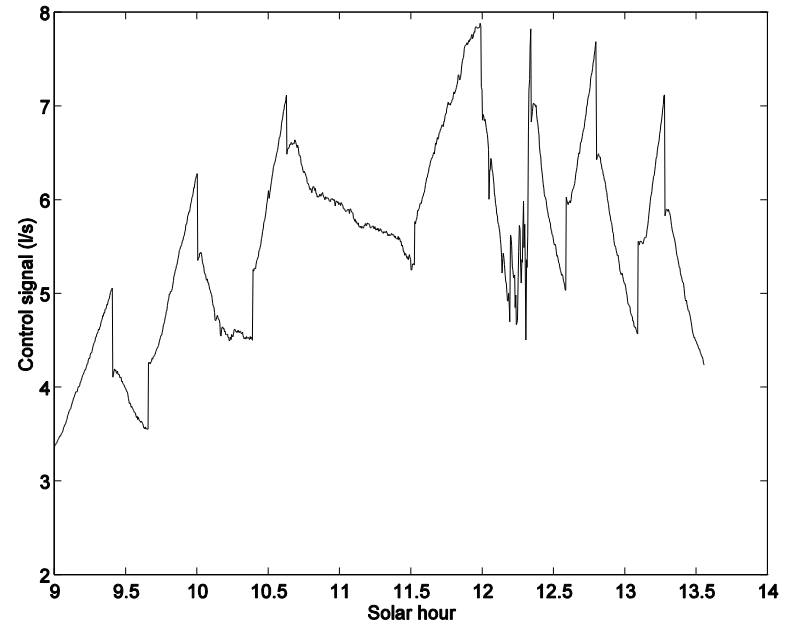
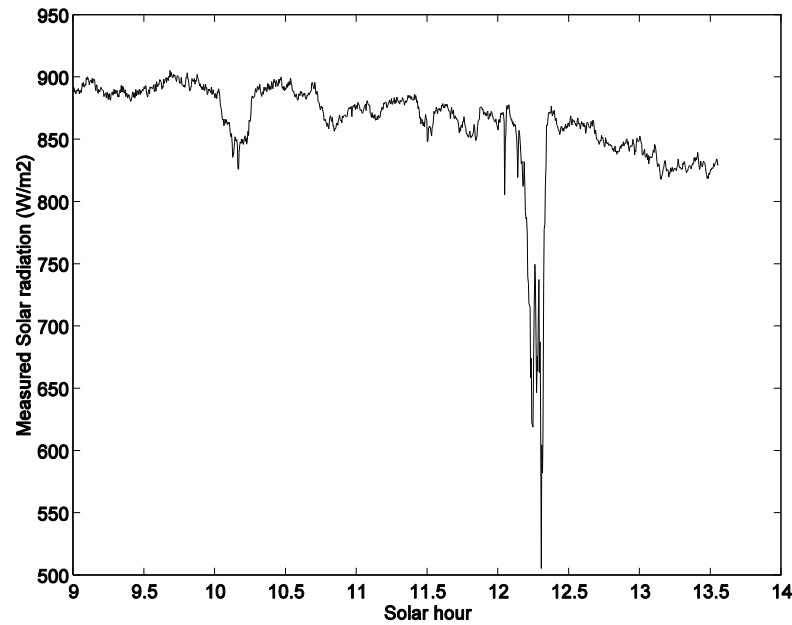
Controlo virtual $v(t)$



Temperatura do óleo à saída

Tomando como entrada o controlo virtual $v(t)$ o sistema comporta-se aproximadamente como um integrador.

Radiação solar e controlo efectivamente aplicado ao campo



Controlador adaptativo

Erro de seguimento:

$$e(t) := r - y(t)$$

Vamos supôr a referência r constante.

Vamos usar um controlador linear proporcional:

$$v(t) := Ke(t)$$

Equação de erro:

$$\frac{de}{dt} = -v - \tilde{\alpha}R \qquad \frac{de}{dt} = -Ke - \tilde{\alpha}R$$

Equações de estado:

$$\frac{de}{dt} = -Ke - \tilde{\alpha}R$$
$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = a \text{ definir}$$

Vamos definir a equação de estado para $\tilde{\alpha}$ por forma a que o sistema fique estável. Note-se que, dado que α é constante, como $\tilde{\alpha} := \alpha - \hat{\alpha}$, se obtivermos uma equação para $\tilde{\alpha}$ também obteremos uma equação para $\hat{\alpha}$ (que é a lei de adaptação).

Tome-se como candidata a função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{\alpha}^2 \right)$$

Então

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} = -Ke^2 + \left[\dot{\tilde{\alpha}} \frac{1}{\gamma} - \text{Re} \right] \tilde{\alpha}$$

Escolhe-se a lei de adaptação por forma a que o termo que multiplica $\tilde{\alpha}$ se anule. Isto produz a lei de adaptação

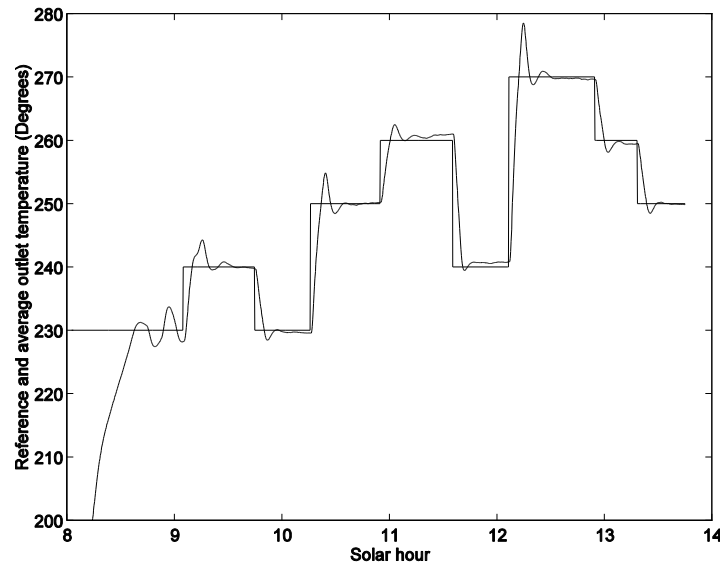
$$\dot{\tilde{\alpha}} = \gamma R(t)e(t) \quad \text{ou} \quad \dot{\tilde{\alpha}} = -\gamma R(t)e(t)$$

Com esta escolha da lei de adaptação, a derivada da função de Lyapunov fica

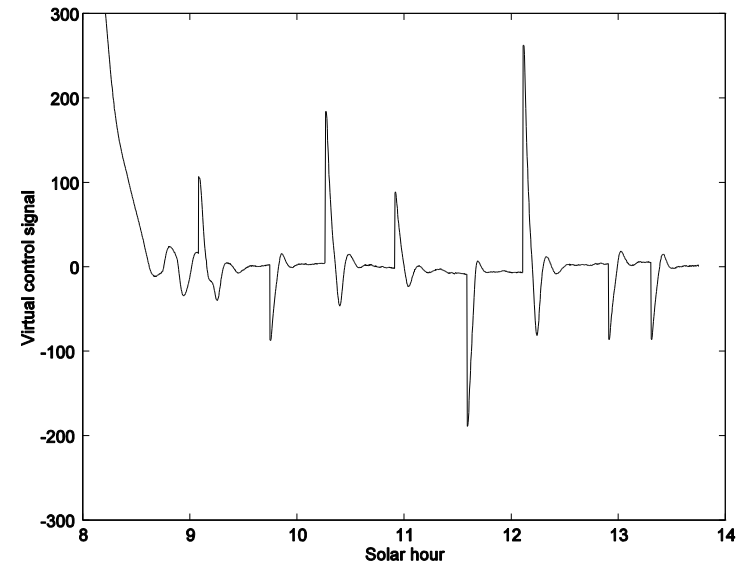
$$\dot{V} = -Ke^2$$

De acordo com o Teorema de Estabilidade de Lyapunov, o sistema controlado é estável, mas não necessariamente assintoticamente estável. No entanto o Teorema do Conjunto Invariante permite afirmar que todas as trajectórias convergem para o maior conjunto invariante em que \dot{V} se anula. Neste conjunto (que não é vazio porque inclui pelo menos a origem) sabemos que o erro de seguimento e se anula. Podemos assim concluir que, com a lei de controlo deduzida (e para o modelo simplificado), a saída segue a referência.

Resultados experimentais



Referência e temperatura à saída

Controlo virtual $v(t)$

Repare-se que o desempenho é melhor quando se diminui a temperatura do que quando se aumenta. Quando se diminui a temperatura o caudal aumenta, o que torna o sistema mais rápido e melhora o desempenho do controlador.