## Exercise – Infinite horizon LQ control of a 1st order plant

Plant model

$$\dot{x} = x + u$$

a) Find the feedback controller that minimizes the steady-state quadratiuc cost

$$J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + u^2(t)]dt$$

Suggestion

Assume $\lambda(t) = -px(t)$ with $p$ a constant.

Use Pontryagin's Maximum Principle and differentiate $\lambda = -px$ to obtain $G(p)x = 0$ for a polynomial $G$.

Adjoint equation: $-\dot{\lambda} = \lambda f_x + L_x$ Hamiltonian: $H = \lambda' f + L$

b) Solve the same problem with the Chang-Letov theorem.

$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho} b(s)b(-s)$ Assume a control law $u(t) = -Kx(t) + r$

## Solution

a) $f = x + u,\quad f_x = 1 \quad L = -(x^2 + u^2),\quad L_x = -2x$

$-\dot{\lambda} = \lambda f_x + L_x \qquad \dot{\lambda} = -\lambda + 2x$

$H = \lambda' f + L = \lambda(x + u) - x^2 - u^2$

There are no constraints and $H$ is a concave function of $u$. Extremum condition:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda - 2u = 0 \qquad u^* = \frac{1}{2}\lambda.$$

$$\dot{\lambda} = -p\dot{x} \qquad px + 2x = -p(x - \frac{1}{2}px)$$

$$\frac{1}{2}p^2 - 2p - 2 = 0 \qquad p = 2 \pm \sqrt{8} \qquad p = 2 + \sqrt{8 \cong 4{,}828}$$

$$u^*(t) = -2{,}414x(t)$$

$\dot{x} = x + u \qquad X(s) = \frac{1}{s-1} U(s)$

$$\Delta(s) = (s-1)(-s-1) + \frac{1}{\rho} = 0$$

$$\rho = 1$$

$s^2 - 2 = 0 \quad s = \pm\sqrt{2}$ Optimal root: $s = -\sqrt{2} \cong -1{,}414$

Closed loop:

$u(t) = -Kx(t) + r \qquad \dot{x} = (1-K)x + r \qquad X(s) = \frac{1}{s+(k-1)} R(s)$

$k - 1 = \sqrt{2} \qquad k = 1 + \sqrt{2} \cong 2.414$

$u(t) = -\left(1 + \sqrt{2}\right)x \cong -2.414x(t).$

# Relative stability of the LQ controller

Linear plant model

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

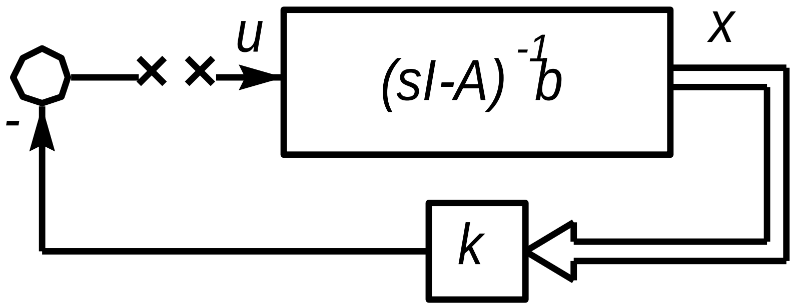
$$y(t) = Cx(t)$$

Klaplace transform of the state transition matrix of the open-loop system:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

## Loop gain:

Obtained by interrupting the control loop and multiplying all the gains.




$$L(s) = k\Phi(s)b$$

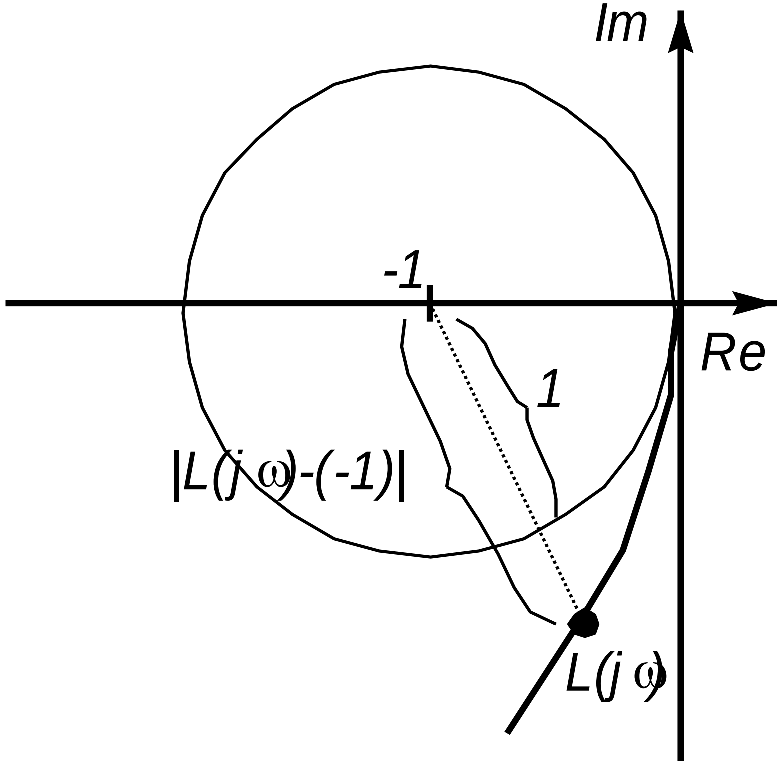
## Kalman inequality:

For a controller that results from optimizing a quadratic cost:

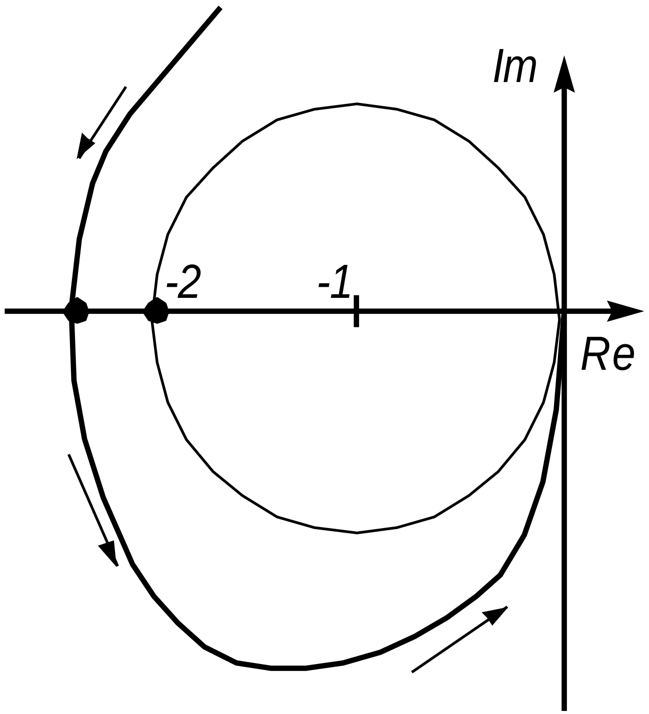
$$|1 + L(j\omega)| \geq 1$$

Consequence of the Kalman inequality:

$$\left|1+L(j\omega)\right|\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|L(j\omega)-(-1)\right|\geq 1$$

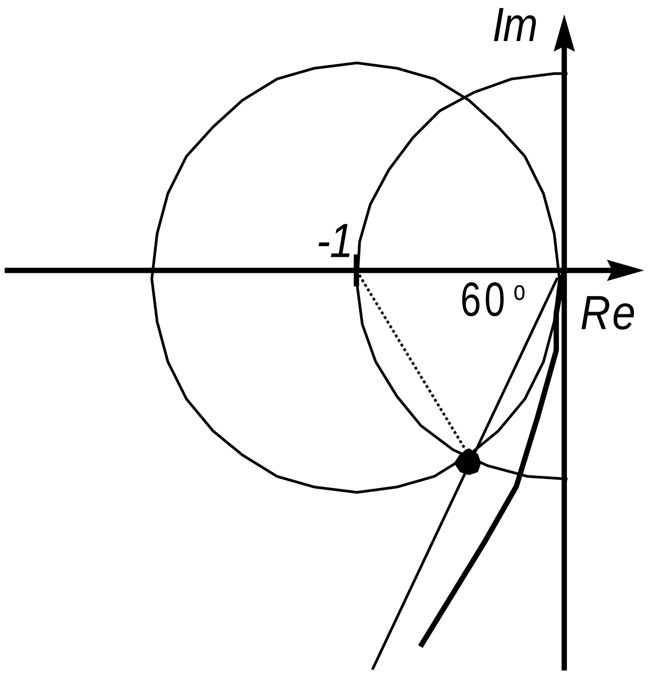



*Conclusion*: The Nyquit diagram of $L(j\omega)$ never enters a circle of radius 1, centered at –1.




In the worst situation, the LQ controller accepts a gain reduction of ½ before the loop gain touches –1.

The gain margin is at least 0.5.




In the worst case the LQ controller accepts a phadse reduction of at least 60$^o$ before the loop gain touches –1.

The phase margin of the LQ is at least 60$^o$.

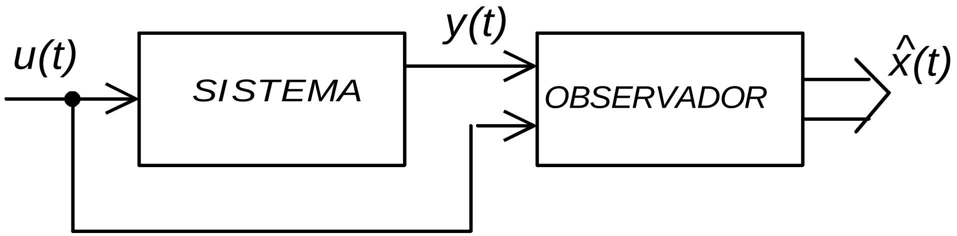
## Problem: State estimationm

Given a state realization $\{A, b, c\}$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

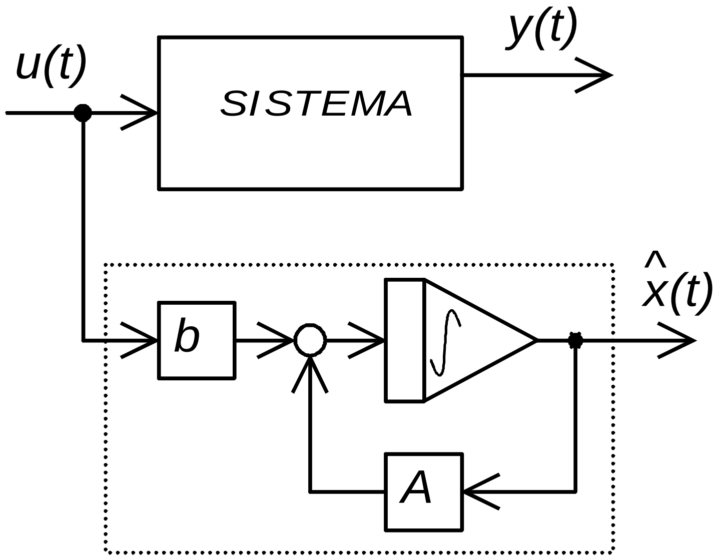
$$y(t) = cx(t)$$

find an estimate $\hat{x}(t)$ of $x(t)$ by observing $y$



# $1^{st}$ SOLUtion: Open loop observer

A replica of the system, excited by the same input




Does it work?

## Estimation error in the open-loop observer

Wqhat is the equation satisfied by the estimation error $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ?

Subtract the observer equation from the plant model equation:

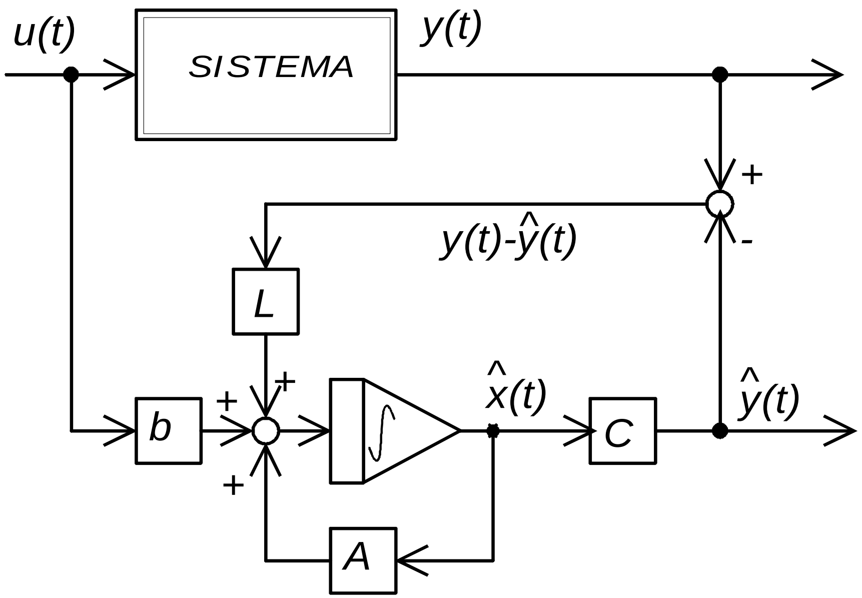
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu \end{aligned}$$

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) + bu - bu$$

hence $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$

***Conclusion:*** With the open loop observer the estimation error converges to zero only for stable plants and at the same rate of the plant eigenvalues.

# $2^{nd}$ SOLUTION: Closed-loop (asymptotic) observer




$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right]$$

**Column vector**

*dim L= dim x*

*What is the equation satisfied by the error?*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu + L\left[y - c\hat{x}\right] \end{aligned}$$

---

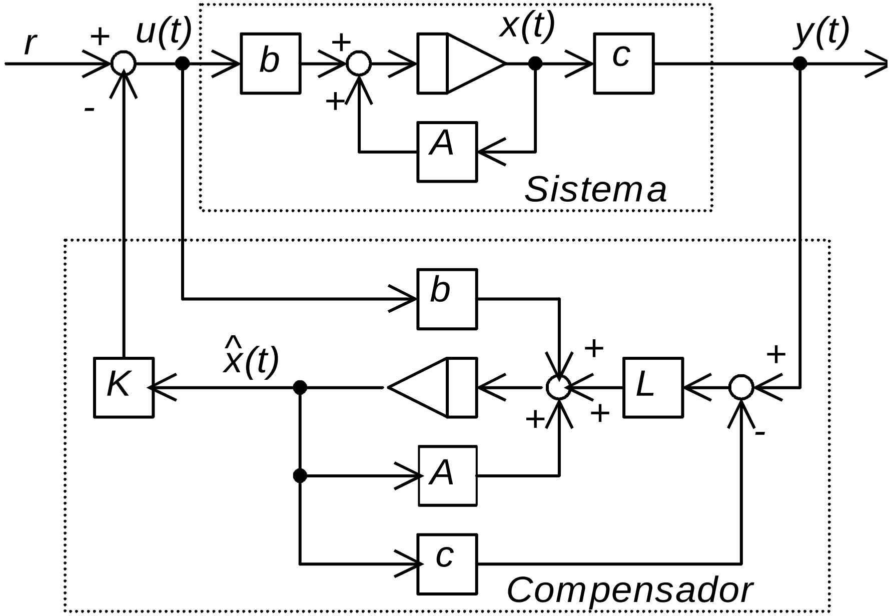
$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) + bu - bu - L\left[\underset{\substack{\uparrow \\ y=cx}}{y} - c\hat{x}\right]$$

***Conclusion:***

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left[A - Lc\right]\tilde{x}(t)$$

If the pair $(A, c)$ is observable, we can select arbitrarily the eigenvalues of $A - Lc$.

# Feedback of the state estimate




Plant:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad y(t) = cx(t)$$

Observer:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - Lc)\hat{x}(t) + Lcy(t) + bu(t)$$

Control law:

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

The whole system is of order *2n.*

## Separation theorem

The characteristic polynomial of the globlal system is the ptroduct of the characteristic polynomials of $A-bK$ and $A-Lc$.

# Lemma

Let $A, C$ be square matrices. then

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$$

*Proof:*

$\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} = |C|$ and $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I \end{vmatrix} = |A|$

Since $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ the result is immediate.

## Proof of the separation theorem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad y(t) = cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - Lc)\hat{x}(t) + Lcy(t) + bu(t)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

Eliminate $u$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bK\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = Lcx(t) + (A - Lc - bK)\hat{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bK\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = Lcx(t) + (A - Lc - bK)\hat{x}(t)$$

Change of variable $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - Lc)\tilde{x}(t)$$

In terms of the new variables

$$\dot{x}(t) = (A - bK)x(t) + bK\tilde{x}(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - Lc)\tilde{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = (A - bK)x(t) + bK\tilde{x}(t)$$
$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - Lc)\tilde{x}(t)$$

In matrix form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bK & bK \\ 0 & A - Lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

By the Lemma:

$$\begin{vmatrix} sI - A + bK & -bK \\ 0 & sI - A + Lc \end{vmatrix} = \underbrace{\det(sI - A + bK)}_{controlador}.\underbrace{\det(sI - A + Lc)}_{observador}$$

## The Kalman-Bucy filter

*Objective*: Optimizing the observer gains using.

Stochastic process model:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + w(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

White Gaussian noise

$v$ and $w$ are white and Gaussian and such that

$$E\left[w(t)w^T(t+\tau)\right] = Q_o\delta(\tau) \qquad E\left[v(t)v^T(t+\tau)\right] = R_o\delta(\tau)$$

The Kalman-Bucy filter recursively computes the state estimate $\hat{x}$ such that it is:

*Unbiased*:

$$E\left[x(t)-\hat{x}(t)\right]=0$$

*Minimizes*:

$$\int_0^{\infty}\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|^2 dt$$

That is to say, the estimation error has menimum energy.

## Kalman-Bucy filter equations

The estimate $\hat{x}$ is propasgated in time by solving the differential equation

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L_o(y(t) - C\hat{x}(t))$$

The optimal gain vector is

$$L_o = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

The matrix $\Sigma$ is the only solution symmetric and positive definite of the filter algebraic Riccati equation

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C\Sigma = 0$$

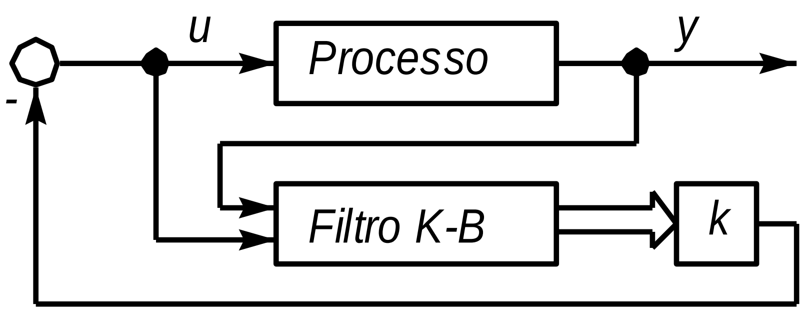
# Linear Quadratic Gaussian regulator (LQG)

*Combins*:

State estimation with a Kalman filter

*with*

Feedback of the estimate $\hat{x}$ designed using a LQ, assuming that the state is accessible.




The separation theorem is valid for the LQG regulator.

**Rudolph Kalman** nasceu em 1930, em Budapest na Hungria

Emigrou para os U.S.A., onde estudou no MIT e, posteriormente, na Universidade de Colúmbia, onde fez o seu doutoramento. No início dos anos 60, o seu nome ficou ligado aos artigos que estabeleceram os fundamentos do Controlo LQ e LQG e à filtragem óptima linear com base no modelo de estado, que desenvolveu em conjunto com **Richard Bucy**.

Foi Kalman que “trouxe” para a comunidade do Controlo os métodos desenvolvidos por Lyapunov 70 anos antes e que os aplicou ao estudo da estabilidade de sistemas descritos por modelos de estado lineares.

# Equações do Regulador LQG

Equações do estimador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L_o(y(t) - C\hat{x}(t))$$

$$L_o = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C\Sigma = 0 \qquad \Sigma = \Sigma^T \geq 0$$

Equações do regulador

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \qquad K = \frac{1}{\rho} B^T P \qquad A^T P + PA - \frac{1}{\rho} PBB^T P + Q = 0$$

## Recuperação do Ganho de Malha

*Loop Transfer Recovery (LTR)*

Não há qualquer garantia sobre as margens de estabilidade (margem de ganho e margem de fase) do regulador LQG. Estas margens podem ser perigosamente baixas, dependendo das características estatísticas do ruído.

*Idéia*: Usar os parâmetros que definem a estatística do ruído, $R_o$ e $Q_o$ como parâmetros de ajuste para recuperar o ganho de malha que se obteria com um regulador LQ (e que tem boas características de estabilidade relativa).

É nisto que consiste o controlo LQG-LTR (LQG com recuperação do ganho der malha).

Pode demonstrar-se que se:

1) $G(s)$ é de fase mínima;

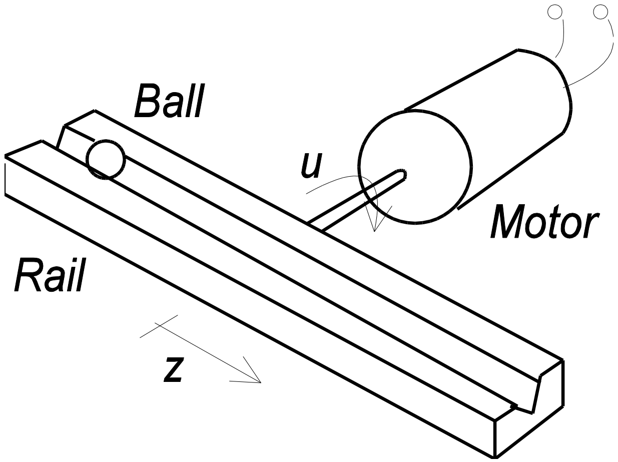
2) $R_0 = 1$ e $Q_0 = q^2 BB^T$

Então

$$\lim_{q \to \infty} L_{LQG}(s) = L_{LQ}(s)$$

Isto sugere que se projecte um filtro de Kalman-Bucy em que o parâmetro $q$ é muito elevado.

# Exemplo: Controlo de um integrador duplo




Este e outros sistemas podem ser modelados como um integrador duplo, tomando como variáveis de estado

$$x_1 = z \qquad x_2 = \dot{z}$$

# Modelo do integrador duplo

Modelo de estado do integrador duplo:

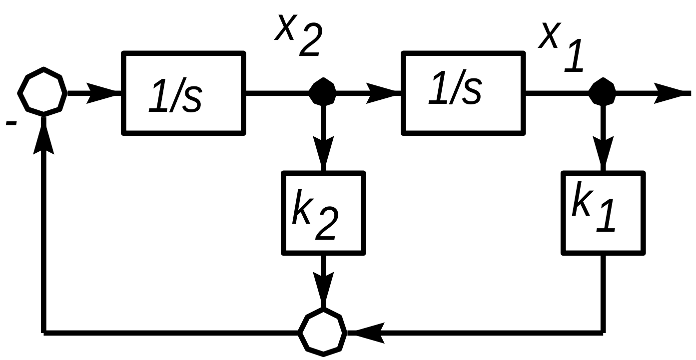
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Função de transferência do integrador duplo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

# Integrador duplo com regulador LQ




Pretende-se esciolher os ganhos $k_1$ e $k_2$ por forma a minimizar o custo quadrático de horizonte inifinito:

$$J_{LQ} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t)\right]dt$$

Assume-se que se tem acesso directo à medida de $x_1$ e $x_2$.

# Equação Algébrica de Riccati (ARE):

$$A'P + PA + Q - \frac{1}{\rho} PBB'P = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = C'C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ARE fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_2^2 = 1 \\ p_1 = p_2 p_3 \\ 2p_2 - p_3^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \qquad P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ganho óptimo:

$$K_{LQ} = \frac{1}{\rho} B' P$$

Como

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vem

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Com os ganhos óptimos, a dinâmica do sistema em cadeia fechada fica:

$$A - BK_{LQ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Equação característica da cadeia fechada:

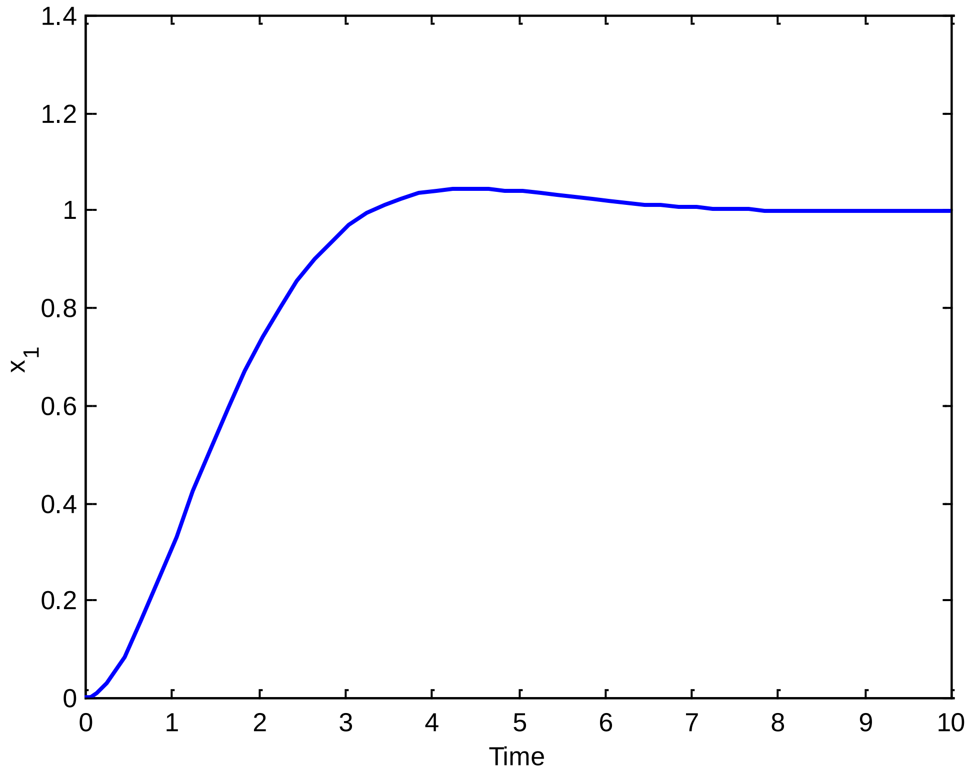
$$\det\left(sI - A + BK_{LQ}\right) = s^2 + \sqrt{2}s + 1 = 0$$

Pólos da cadeia fechada

$$s_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)$$

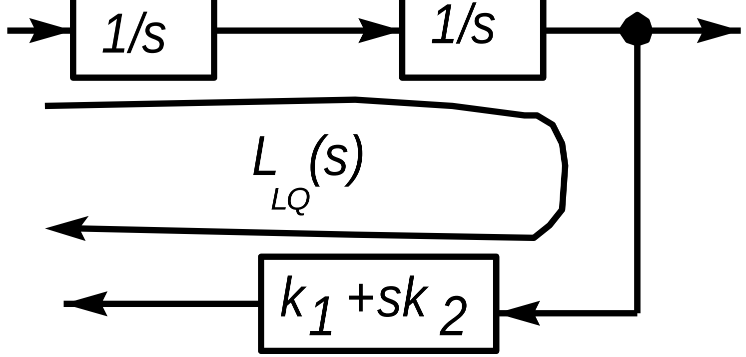
O sistema em cadeia fechada fica estável e com um coeficiente de amortecimento $\varsigma = 0.707$.

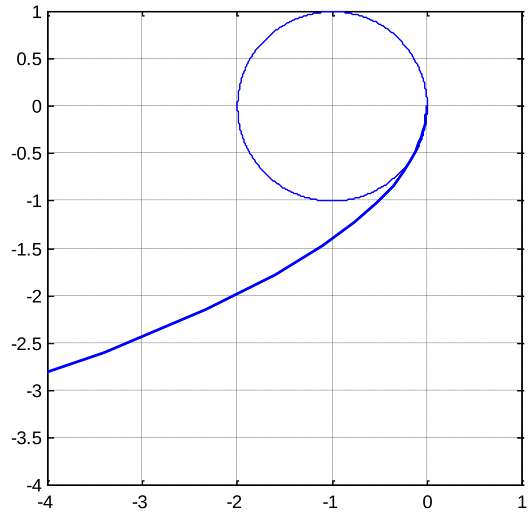
# Resposta ao escalão do sistema com controlo LQ



Ganho de malha com controlo LQ:

$$L_{LQ}(s) = K\Phi(s)B = K\left(sI - A\right)^{-1}B \quad \rightarrow \quad L(s) = \frac{\sqrt{2}s+1}{s^2}$$




Como esperado, o ganho de malha não entra no círculo de raio 1.

Modelo do integrador duplo com ruído:

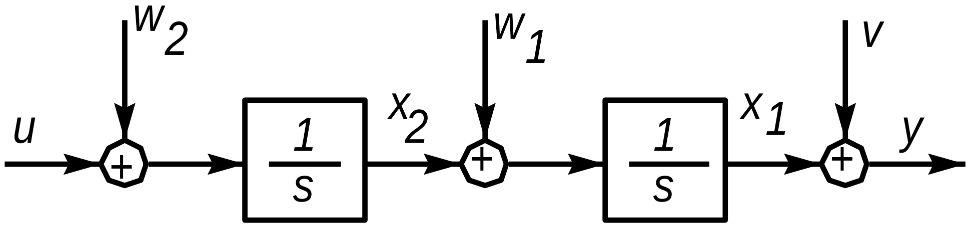
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + v(t)$$

Os sinais $v$, $w_1$ e $w_2$ são sinais estocásticos mutuamente independentes, cujas características estatísticas são usadas para ajustar o ganho de malha:

$$E\left\{ \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) \end{bmatrix} \right\} = Q_o \qquad E\left[ v^2(t) \right] = R_o$$

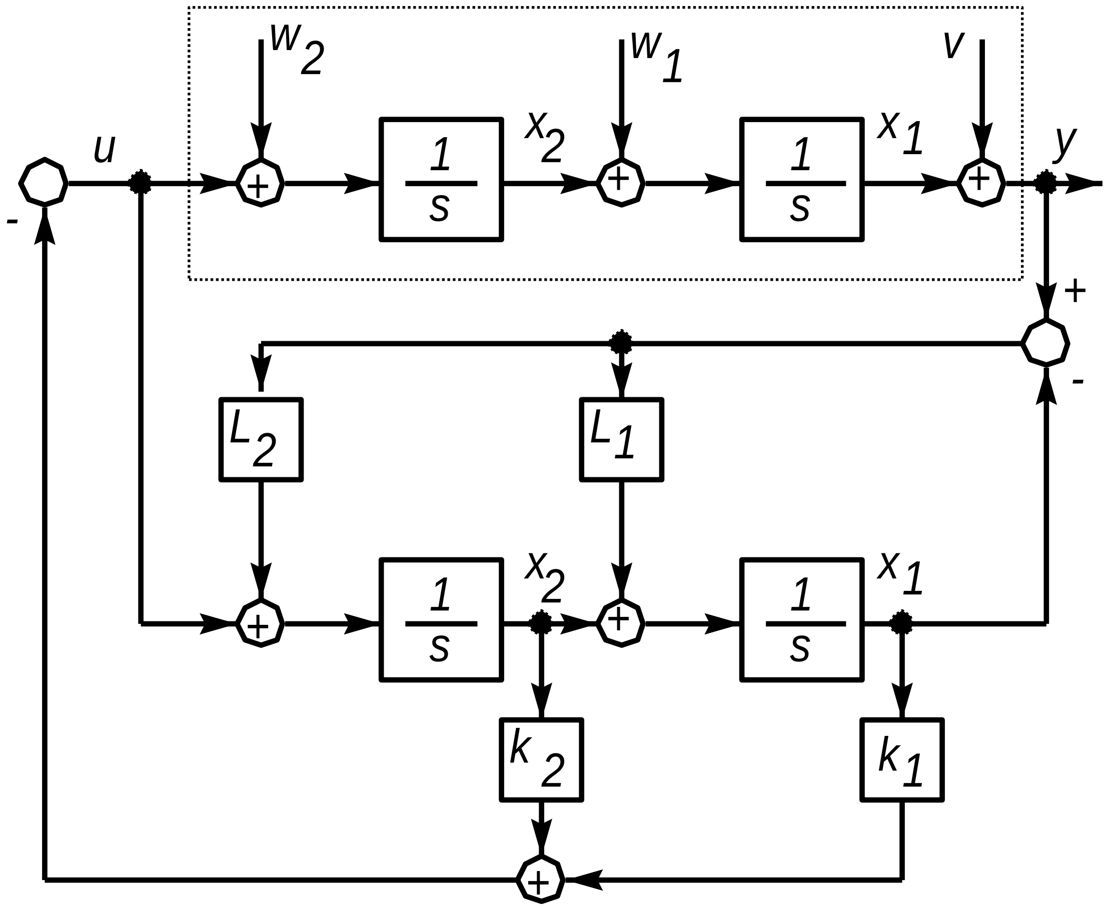
Diagrama de blocos do integrador duplo com ruído:




Vamos assumir

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_o = 1$$

# Integrador duplo com controlador LQG




$k_1$ , $k_2$ projectados tal como no regulador LQ.

$L_1$ , $L_2$ projectados de acordo com o dimensionamento do filtro de Kalman-Bucy

## Cálculo dos ganhos do filtro de Kalman-Bucy

Equação de Riccati para o filtro:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C\Sigma = 0$$

Assumindo $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ e usando o método dos coeficientes indeterminados obtém-se a solução definida positiva:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ganhos óptimos do filtro:

$$L = \Sigma C^T R_o^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Função de transferência do compensador LQG:

$$G_{CLQG} = K_{LQ}(sI - A + BK_{LQ} + LC)^{-1} L$$

$$G_{CLQG} = \frac{3.14(s + 0.31)}{s + 1.57 \pm j1.4}$$

Pólos da cadeia fechada do integrador duplo com LQG:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 \pm j\right) \qquad\qquad \frac{-\sqrt{3} \pm j}{2}$$

Pólos do sistema

controlado com LQ,

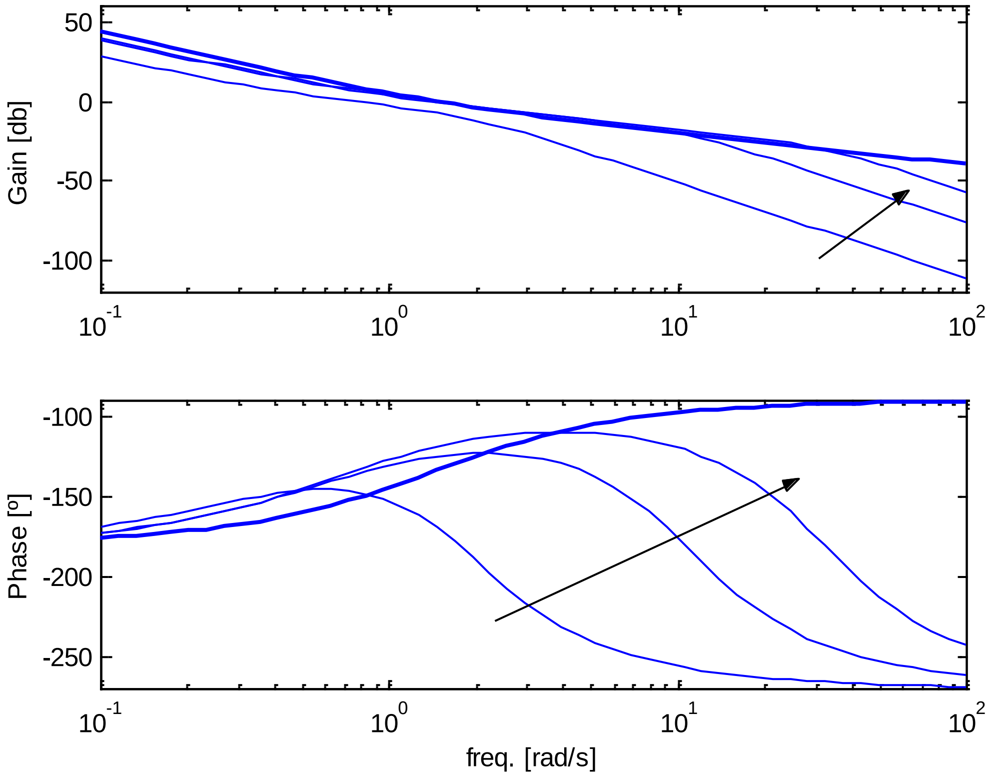
supondo acesso ao estado

Pólos do filtro

## Comparação dos reguladores LQ e LQG

1. O LQ tem maiores margens de estabilidade.
2. Nas baixa frequência o ganho de malha do LQ é maior do que o do LQG. Isto implica que o LQ tem melhores propriedades de seguimento do que o LQG.
3. A frequência de corte é maior no LQ do que no LQG
    a. O LQ é mais susceptível ao ruído
    b. O LQ é mais rápido a responder
4. Na alta frequência, a inclinação da curva de ganho é –20dB/déc no LQ e –60db/déc no LQG. O LQ é mais susceptível ao ruído do que o LQG, mas tem melhor estabilidade relativa.

# Recuperação do ganho de malha no integrador duplo com controlo LQG




$$q = 1, 100, 1000$$