

Exercícios Resolvidos

Campos Fechados. Campos Gradientes. Teorema Fundamental do Cálculo.

Exercício 1 Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (yz - y, x + xz, xy + z)$.

- a) Indique, justificadamente, se o campo F é conservativo.
- b) Calcule o trabalho de F ao longo da circunferência definida pelas equações $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário, quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução:

- a) Dado que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 + z$ e $\frac{\partial F_1}{\partial y} = z - 1$, o campo F não é fechado e, portanto, não é conservativo.
- b) Como o campo não é fechado, para calcular o trabalho devemos usar a definição. Podemos considerar a parametrização da circunferência dada por $g(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim, temos

$$\int_0^{2\pi} F(g(\theta)) \cdot g'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 4 \cos \theta \sin \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta = 8\pi.$$

Uma vez que esta parametrização percorre a circunferência no sentido oposto ao que é pedido, o trabalho que pretendemos calcular é igual a -8π .

Exercício 2 Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (3zx^2, \sin z + z, y \cos z + y + x^3)$. Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida pelo caminho $g(t) = (\cos t, 2 \sin t, t)$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução: Como F é fechado e o seu domínio é \mathbb{R}^3 , que é um conjunto simplesmente conexo, podemos concluir que F é um campo gradiente, ou seja, existe um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla \phi$.

Para calcular o potencial notamos que ϕ satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 3zx^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin z + z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = y \cos z + y + x^3 \end{cases}$$

Primitivando a primeira equação em ordem a x , vem

$$\phi(x, y, z) = zx^3 + f(y, z),$$

onde $f(y, z)$ é uma constante relativamente a x , mas que pode depender de y e de z . Substituindo na segunda equação, obtêm-se

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} z + z.$$

Primitivando em y , vem $f(y, z) = y \operatorname{sen} z + yz + h(z)$, em que $h(z)$ é uma constante relativamente a y , mas pode depender de z . Assim, a função ϕ passa a ser dada por

$$\phi(x, y, z) = zx^3 + y \operatorname{sen} z + yz + h(z).$$

Substituindo na terceira equação, obtêm-se

$$x^3 + y \cos z + y + h'(z) = y \cos z + y + x^3,$$

ou seja,

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow h(z) = C,$$

onde C é uma constante. O potencial é então dado por

$$\phi(x, y, z) = y \operatorname{sen} z + yz + x^3 z + C.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha obtemos o trabalho de F ao longo do caminho g :

$$\int_A^B F \cdot dg = \phi(B) - \phi(A) = \phi(g(2\pi)) - \phi(g(0)) = \phi(1, 0, 2\pi) - \phi(1, 0, 0) = 2\pi,$$

onde A e B são os pontos inicial e final, respectivamente, da curva definida por g .

Exercício 3 Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + e^{x+y^2}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2y e^{x+y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

(a) Mostre que F é gradiente no seu domínio de definição. Justifique a resposta.

(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $g(t) = (1 + t^2, 1 + t^6, t^{2012})$. Justifique detalhadamente a resposta.

Resolução:

- (a) É fácil verificar que F é fechado. No entanto, uma vez que o seu domínio, dado por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\}$, não é simplesmente conexo, não podemos concluir diretamente que F é gradiente. Se for um campo gradiente, o respectivo potencial ϕ é calculado a partir da equação $\nabla\phi = F$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2ye^{x+y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \end{cases}$$

Primitivando a primeira equação em ordem a x , vem

$$\phi(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + e^{x+y^2} + f(y, z),$$

onde $f(y, z)$ é uma constante relativamente a x , mas que pode depender de y e de z . Substituindo na segunda equação, obtêm-se

$$\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2ye^{x+y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2ye^{x+y^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Primitivando em y , vem $f(y, z) = h(z)$, em que $h(z)$ é uma constante relativamente a y , mas pode depender de z . Assim, a função ϕ passa a ser dada por

$$\phi(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + e^{x+y^2} + h(z).$$

Substituindo na terceira equação, obtêm-se

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + h'(z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$$

ou seja,

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow h(z) = C,$$

onde C é uma constante. O potencial é então dado por

$$\phi(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + e^{x+y^2} + C.$$

Como ϕ é de classe C^1 no conjunto D e $\nabla\phi = F$, concluímos que F um campo gradiente.

(b) Como F é um campo gradiente com potencial ϕ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha temos que

$$\int_C F \cdot dg = \phi(g(1)) - \phi(g(0)) = \phi(2, 2, 1) - \phi(1, 1, 0) = \sqrt{7} + e^6 - e^2 .$$

Exercício 4

Considere a elipse C de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$. Calcule o trabalho do campo vetorial

$$G(x, y) = \left(\frac{3x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{3y}{x^2 + y^2} + \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

ao longo da elipse C percorrida no sentido anti-horário.

Resolução: Podemos escrever $G = F + H$ onde

$$F(x, y) = \left(\frac{3x}{x^2 + y^2}, \frac{3y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{e} \quad H(x, y) = \left(\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$

Facilmente se verifica que o campo F é um gradiente, ou seja, $F = \nabla\varphi$, onde o potencial é dado por

$$\varphi(x, y) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, podemos concluir que o trabalho de F ao longo da elipse é 0, porque a elipse é uma curva fechada.

Por outro lado, sendo H um vórtice (“ralo da banheira”), sabemos que é fechado. A elipse C é homotópica à circunferência C_1 de raio 1 centrada no ponto $(-1, 0)$, definida pela equação $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Logo, por invariância por homotopia, podemos concluir que o trabalho de H ao longo da elipse é igual ao trabalho de H ao longo da circunferência, pois as duas curvas são homotópicas no domínio do campo H .

Finalmente, se considerarmos a parametrização da circunferência dada por $g(t) = (\cos t - 1, \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, obtêm-se que o trabalho de G ao longo da elipse é dado por

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_C H \cdot dg = \oint_{C_1} H \cdot dg = \int_0^{2\pi} H(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-2) dt = -4\pi.$$