Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Integrais de linha de campos escalares e de campos vetoriais

Exercício 1 *Considere um fio não homogéneo modelado pela curva*

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = 0,\ z = \cosh(x),\ -1 \leq x \leq 1\right\}$$

com densidade de massa $\rho(x, y, z) = z$*. Calcule:*

a) O comprimento do fio;

b) A massa do fio;

c) O centróide do fio;

d) O centro de massa do fio;

e) O momento de inércia do fio em relação ao eixo dos xx*.*

Resolução:

a) Uma parametrização para C é $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(t) = (t, 0, \cosh(t)),$$

e satisfaz

$$\frac{dg}{dt}(t) = (1, 0, \sinh(t)).$$

Portanto,

$$\left\|\frac{dg}{dt}(t)\right\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh(t).$$

e o comprimento de C é

$$L = \int_{-1}^{1} \left\|\frac{dg}{dt}(t)\right\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh(t)dt = 2\sinh(1).$$

b) A massa é dada por

$$M = \int_{-1}^{1} \rho(g(t)) \left\|\frac{dg}{dt}(t)\right\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh^2(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} dt = \frac{1}{2}\sinh(2) + 1.$$

c) A coordenada x_C do centróide é dada por

$$x_C L = \int_{-1}^{1} x(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} t \cosh(t) dt = 0$$

ou seja,

$$x_C = 0.$$

Analogamente, a coordenada y_C do centróide é dada por

$$y_C L = \int_{-1}^{1} y(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} 0 \cdot \cosh(t) dt = 0,$$

ou seja,

$$y_C = 0.$$

Finalmente, a coordenada z_C do centróide é dada por

$$z_C L = \int_{-1}^{1} z(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh^2(t) dt = M,$$

ou seja,

$$z_C = \frac{M}{L} = \frac{\sinh(2) + 2}{4 \sinh(1)}.$$

d) A coordenada x_{CM} do centro de massa é dada por

$$x_{CM} M = \int_{-1}^{1} x(g(t)) \rho(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} t \cosh^2(t) dt = 0,$$

ou seja,

$$x_{CM} = 0.$$

Analogamente, a coordenada y_{CM} do centro de massa é dada por

$$y_{CM} M = \int_{-1}^{1} y(g(t)) \rho(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} 0 \cdot \cosh^2(t) dt = 0,$$

ou seja,

$$y_{CM} = 0.$$

Finalmente, a coordenada z_{CM} do centro de massa é dada por

$$\begin{aligned} z_{CM} M &= \int_{-1}^{1} z(g(t)) \rho(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh^3(t) dt = \int_{-1}^{1} \left(1 + \sinh^2(t)\right) \cosh(t) dt \\ &= 2 \sinh(1) + \frac{2}{3} \sinh^3(1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_{CM} = \frac{12 \sinh(1) + 8 \sinh^3(1)}{3 \sinh(2) + 6}.$$

e) O momento de inércia pedido é

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-1}^{1} \left[y^2(g(t)) + z^2(g(t))\right] \rho(g(t)) \left\| \frac{dg}{dt}(t) \right\| dt = \int_{-1}^{1} \cosh^4(t) dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{e^{4t} + 4e^{2t} + 6 + 4e^{-2t} + e^{-4t}}{16} dt = \frac{1}{16} \sinh(4) + \frac{1}{4} \sinh(2) + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 2

Considere a curva

$$C = \left\{ \left(e^{-\theta} \cos\theta, e^{-\theta} \operatorname{sen}\theta \right) : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

e o campo vetorial

$$F(x,y) = (-y, x).$$

Calcule:

(a) O comprimento de C;

(b) O valor de $\int_C F \cdot dg$ com uma orientação à sua escolha.

Resolução:

(a) Uma parametrização para C é $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(\theta) = \left(e^{-\theta} \cos\theta, e^{-\theta} \operatorname{sen}\theta \right),$$

e satisfaz

$$\frac{dg}{d\theta}(\theta) = -e^{-\theta} \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta \right) + e^{-\theta} \left(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \right).$$

Portanto,

$$\left\| \frac{dg}{d\theta}(\theta) \right\| = \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta} + 2 \cdot 0} = \sqrt{2} e^{-\theta},$$

e o comprimento de C é

$$V_1(C) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{dg}{d\theta}(\theta) \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2} \left(1 - e^{-2\pi} \right).$$

(b) Escolhendo a orientação dada pela parametrização g, temos

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dg &= \int_0^{2\pi} F(g(\theta)) \cdot \frac{dg}{d\theta}(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-e^{-\theta} \operatorname{sen}\theta, e^{-\theta} \cos\theta \right) \cdot \frac{dg}{d\theta}(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(0 + e^{-2\theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-4\pi} \right). \end{aligned}$$

Exercício 3 *Calcule o trabalho realizado pela força*

$$F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

ao longo da curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

percorrida no sentido dos valores de z decrescentes.

Resolução: Uma parametrização desta curva é por exemplo $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\theta),$$

que no entanto corresponde às orientação inversa da pretendida. O integral de linha de F ao longo da curva com esta orientação é

$$\begin{aligned}
&\int_C (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz \\
&= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta + 2\theta, \cos\theta + 2\theta, \cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 2)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2\theta - 2\theta\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta + 2\theta\cos\theta + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)d\theta + \Big[2\theta\cos\theta + 2\theta\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{2\pi} = 4\pi,
\end{aligned}$$

pelo que o trabalho realizado é então -4π.