Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Mudança de variáveis

Exercício 1 *Calcule o volume de um cone circular reto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.*

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), o cone pode ser descrito por $\frac{h}{a}\rho \leq z \leq h$, e portanto o seu volume é dado por

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{a}\rho}^{h} \rho \, dz d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^a \left(h\rho - \frac{h}{a}\rho^2 \right) d\rho = \pi h a^2 - \frac{2\pi h a^2}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

Exercício 2 *Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1 ao longo de um diâmetro. Determine o volume do sólido resultante.*

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), a esfera pode ser descrita por $\rho^2 + z^2 \leq 4$, e a broca por $\rho \leq 1$. A intersecção das superfícies de ambos ocorre para $z^2 = 3$, e portanto o volume do sólido resultante será

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4 - z^2 - 1}{2} dz = 4\pi\sqrt{3}.$$

Exercício 3 *Seja A o elipsóide*

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

a) Calcule o volume de A.

b) Supondo que A possui densidade constante igual a 1, calcule o momento de inércia do elipsóide em relação ao eixo dos zz.

(Sugestão: Utilize a mudança de variável $(x, y, z) = (au, bv, cw)$.)

Resolução:

a) Em termos das variáveis (u, v, w) definidas na sugestão, o conjunto A é descrito por $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, i.e., é uma esfera de raio 1. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_3(A) = \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} abc \, dudvdw = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc \, r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi abc}{3}.$$

b)

$$\begin{aligned} I_z(A) &= \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} (a^2u^2 + b^2v^2) abc \, dudvdw \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a^2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi) abc \, r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{5} \pi abc \int_0^\pi (a^2 + b^2)(1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Exercício 4 *Prove o Teorema de Pappus: o volume de um sólido de revolução gerado por uma figura plana é igual a $2\pi dA$, onde A é a área da figura plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular o volume do toro*

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2 \right\} \qquad (0 < r < R).$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), o volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \iint_{\text{figura}} \rho \, d\rho dz d\varphi = 2\pi dA,$$

uma vez que por definição

$$d = \frac{1}{A} \iint_{\text{figura}} \rho \, d\rho dz.$$

Consequentemente, o volume do toro é $2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$.

Exercício 5 *Seja A o sólido*

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq y \leq x\right\}$$

com densidade de massa $\rho(x,y,z) = z$. *Calcule:*

a) O volume de A;

b) A massa de A;

c) O centróide de A;

d) O centro de massa de A;

e) O momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz.

Resolução:

a) Em coordenadas esféricas (r,θ,φ), o volume do sólido é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{12}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) Nas mesmas coordenadas, e uma vez que a densidade é $z = r\cos\theta$,

$$M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{64}.$$

c) Uma vez que $x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, a coordenada x_C do centróide é dada por

$$x_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$x_C = \frac{3(\pi-2)(\sqrt{2}+1)}{8\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r\operatorname{sen}\theta\sin\varphi$, a coordenada y_C do centróide é dada por

$$y_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$y_C = \frac{3(\pi-2)}{8\pi}.$$

Finalmente, uma vez que $z = r\cos\theta$, a coordenada z_C do centróide é dada por

$$z_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = M,$$

ou seja,

$$z_C = \frac{M}{V} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{16}$$

d) Uma vez que $x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, a coordenada x_{CM} do centro de massa é dada por

$$x_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{1}{60},$$

ou seja,

$$x_{CM} = \frac{16}{15\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r\operatorname{sen}\theta\sin\varphi$, a coordenada y_{CM} do centro de massa é dada por

$$y_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{60}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou seja,

$$y_{CM} = \frac{16}{15\pi}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Finalmente, uma vez que $z = r\cos\theta$, a coordenada z_{CM} do centro de massa é dada por

$$z_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{60}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

ou seja,

$$z_{CM} = \frac{16}{15}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

e) Uma vez que o quadrado da distância ao eixo dos zz é dado por

$$x^2 + y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi = r^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

o momento de inércia pedido é

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\operatorname{sen}^2\theta r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{384}.$$