Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Teorema de Fubini

Exercício 1 *Escreva* $\int_A f$ *como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto* A *é:*

a) O triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(2,1)$*;*

b) O sector circular com centro em $(0,0)$ *e cujo arco é o menor arco circular unindo os pontos* $(1,1)$ *e* $(1,-1)$*;*

c) A região compreendida entre as circunferências de raios 1 *e* 2 *centradas na origem.*

Resolução:

a)

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{x-1}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dydx \\ &= \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} f(x,y)dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_A f = &\int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx\end{aligned}$$

(a outra ordem de integração é completamente análoga).

Exercício 2 *Escreva* $\int_A f$ *como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto* A *é:*

a) O tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$*;*

b) A esfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$*;*

c) O cone $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Resolução:

a) Por exemplo,

$$\int_A f = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dzdydx.$$

b) Por exemplo,

$$\int_A f = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dzdydx.$$

c) Por exemplo,

$$\int_A f = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z) dzdydx.$$

Exercício 3 *Escreva o volume do sólido*

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha.

Resolução: Por exemplo,

$$\begin{aligned} V_3(A) = & \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{-\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{-\sqrt{1-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz \\ & + \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz. \end{aligned}$$

Exercício 4 *Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:*

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx;$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx;$

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dydx;$

Resolução:

a) $\displaystyle\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy.$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dxdy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dxdy.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)dxdy + \int_1^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{y^2}{4}}^{2} f(x,y)dxdy$