Relatividade - Módulo 5: Choques relativistas

João Seixas

Instituto Superior Técnico

Ano lectivo 2022/2023

Objectivos:

- Desintegração e colisão de partículas relativistas
- Os referenciais do laboratório e do centro de momento
- Fissão e fusão nucleares

Choque totalmente inelástico de partículas

Como vimos, na ausência de forças externas o quadri-vector energia momento de um sistema é conservado. A situação é todavia diferente da que prevalece na mecânica de Newton e Galileu por causa da relação entre as componentes espaciais e temporal da força que obrigam à relação entre a conservação do momento linear e da energia no caso relativista. O exemplo mais simples que evidencia esta nova situação é a colisão totalmente inelástica de duas partículas.

Choque totalmente inelástico de partículas

Consideremos o caso de duas partículas de massa m que colidem formando uma única partícula. Não há forças exteriores a actuar no sistema pelo que tanto a energia como o momento linear do sistema tem de se conservar entre o estado inicial e final. No referencial próprio da partícula produzida as partículas iniciais aproximam-se uma da outra com a mesma velocidade v^* em módulo de modo que os seus momentos lineares p_1^* e p_2^* são dados por

$$p_1^* = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{{v^*}^2}{c^2}}} \qquad ,$$

$$p_2^* = \frac{-mv}{\sqrt{1 - \frac{{v^*}^2}{c^2}}} \qquad .$$

Choque totalmente inelástico de partículas

A soma dos momentos é nula como tem de ser já que a partícula final é produzida em repouso nesse referencial. Vejamos agora o que se passa com a energia. Para as duas partículas iniciais as suas energias E_1^* e E_2^* são

$$E_1^* = E_2^* = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}}$$

e por isso a energia total no início é

$$E^* = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}}$$

Para o estado final seríamos tentados a escrever que a energia E da partícula final deveria ser

$$E = 2mc^2 \ .$$

Mas esta conclusão não pode estar certa uma vez que nesse caso

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{v*^2}{c^2}}} > 2mc^2$$

e a energia, apesar de não haver forças exteriores a actuar sobre o sistema, não seria conservada.

De onde vem esta contribuição adicional para a energia do estado final? A questão é que para as duas partículas ficarem juntas tem de haver uma força de ligação entre elas, força essa que teve de produzir trabalho para as duas partículas ficarem ligadas. É esse trabalho que não está contemplado na hipótese de a energia no estado final ser $2mc^2$: o que falta nessa hipótese é a **energia de ligação das partículas**.

Choque totalmente inelástico de partículas

Se definirmos a energia **em repouso** da partícula final como

$$E = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v*^2}{c^2}}} \tag{1}$$

tudo se passa como se essa partícula tivesse uma massa M dada por

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v*^2}{c^2}}} \tag{2}$$

e uma energia em repouso

$$E = Mc^2 \qquad . \tag{3}$$

Choque totalmente inelástico de partículas

Com esta definição o sistema de duas partículas é equivalente a uma só partícula com um quadri-momento igual à soma dos quadri-momentos das duas partículas iniciais. Por sua vez as próprias partículas originais poderiam ser elas próprias sistemas de várias partículas com massas definidas desta forma. Esta opção implica que a massa M da partícula final depende da velocidade das partículas iniciais, mas essa desvantagem é largamente compensada pela simplificação que daí resulta em termos de tratamento de sistemas de partículas.

Alguns autores definem a **massa relativista** de uma partícula de massa m como $m\gamma$. Isso implica que a massa depende da velocidade da partícula e a massa m, igual à massa relativista no referencial próprio da partícula, é por isso também designada por *massa em repouso*. No entanto esta definição acarreta várias dificuldades na prática pelo que actualmente se evita usá-la.

Choque totalmente inelástico de partículas

Para simplificar a notação vamos representar daqui em diante por letras do alfabeto latino os quadri-momentos das partículas, desde que tal não crie ambiguidades. Assim, os quadri-momentos das partículas iniciais serão $p_1^* = (E_1, \vec{p}_1^*) = (E_1^*, {p_1^*}^1, 0, 0)$ e $p_2^* = (E_2^*, \vec{p}_2^*) = (E_2^*, -{p_2^*}^1, 0, 0)$ usando a usual notação de Einstein. O quadri-momento da partícula final é $P = (E, 0, 0, 0)$ com

$$P^2 = M^2 c^4 \tag{4}$$

Choque totalmente inelástico de partículas

Como P^2 é um invariante relativista podemos imediatamente escrever o momento linear e a energia em qualquer outro referencial em que a partícula final se move com velocidade $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
E &= M\gamma_v c^2 \quad , \\
\vec{P} &= M\gamma_v \vec{v} \quad ,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

onde

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

Isto implica de imediato que a velocidade (em relação à velocidade da luz) $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ e o correspondente factor relativista γ_v são dados por

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{P}c}{E} \qquad , \\ \gamma_v &= \frac{E}{Mc^2} \qquad . \end{aligned} \tag{6}$$

Referencial do centro de momento

Neste ponto impõe-se uma pequena discussão sobre referenciais relevantes para o estudo de colisões de partículas. À semelhança do que foi feito no caso não relativista podemos definir um referencial identificador do conjunto a partir dos quadri-momentos p_1 e p_2 das partículas iniciais em qualquer referencial. Para isso vamos definir o quadri-momento p_{CM} do conjunto como

$$p_{CM} = (p_1 + p_2) = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c) = (E_{CM}, \vec{p}_{CM} c) \quad , \tag{7}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E_{CM} &= E_1 + E_2 \quad , \\ \vec{p}_{CM} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Referencial do centro de momento

O referencial em que

$$\vec{p}_{CM} = 0 \tag{9}$$

designa-se por **referencial do centro de momento**.Muitos autores designam abusivamente este referencial por referencial do centro de massa por analogia com o caso clássico, o que não é todavia correcto porque no caso relativista a massa do conjunto **não é** igual à massa dos constituintes. Os momentos das partículas nesse referencial tem de obedecer a $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$.

Referencial do centro de momento

No caso do choque de duas partículas idênticas que introduzimos no início desta secção os momentos $\vec{p}^{*}_{1,2}$ são na realidade os momentos no centro de momento que é, simultaneamente, o referencial em que a partícula produzida está em repouso. Isto está de acordo com a definição do centro de massa no caso não relativista . Todavia, como vimos acima, a **velocidade** do centro de momento no referencial original não é definida como a razão entre o momento linear total e a massa, mas como a razão entre o momento linear e a **energia**

$$\vec{\beta}_{CM} = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)c}{(E_1 + E_2)} \quad , \tag{10}$$

enquanto o factor relativista γ_{CM} é dado por

$$\gamma_{CM} = \frac{E_{CM}}{Mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2_{CM}}} \quad . \tag{11}$$

com a massa M dada por (2).

Referencial do centro de momento

O caso mais geral em que as partículas iniciais têm quadri-momentos diferentes p_1 e p_2 é um bom exemplo da utilização do método dos invariantes. O quadri-momento total é, como vimos,

$$P = p_1 + p_2$$

e o quadrado do seu módulo é

$$P^2 = (p_1 + p_2)^2 = M^2 c^4$$

que é um invariante. Por seu lado, $(p_1 + p_2)^2$ é um invariante que toma o mesmo valor em todos os referenciais e por isso pode ser calculado no referencial do centro de momento onde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$.

Referencial do centro de momento

Sendo assim

$$(p_1 + p_2)^2 = (p_{CM_1} + p_{CM_2})^2 = E_{CM}^2 = M^2 c^4 \ ,$$

onde p_{CM_1} e p_{CM_2} são os quadri-momentos das partículas no referencial do centro de momento, e

$$(p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \ .$$

Referencial do centro de momento

Usando de novo (5) (o que é uma consequência de P^2 ser um invariante) temos, para a velocidade e o factor relativista do centro de momento no referencial em que o observador se encontra,

$$\begin{aligned}\vec{\beta}_{CM} &= \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)c}{(E_1 + E_2)} \quad , \\ \gamma_{CM} &= \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(E_1 E_2 - c^2 \vec{p}_1 . \vec{p}_2)}} \quad .\end{aligned} \tag{12}$$

Referencial do centro de momento

A desintegração, ou decaimento, de partículas pode ser tratado de forma muito semelhante ao da colisão inelástica. Por exemplo, a partícula (electricamente neutra) J/ψ pode decair num par constituído por um muão negativo μ^- e um muão positivo μ^+ (a anti-partícula do anterior). O quadri-momento do J/ψ no seu referencial próprio é $(Mc^2, 0, 0, 0)$ onde M é a massa do J/ψ em repouso. Os tri-momentos dos dois muões são portanto $\vec{p}$ e $-\vec{p}$ nesse referencial, enquanto as suas energias são iguais a $E = Mc^2/2 = m\gamma c^2$ onde γ e m são o factor relativista a massa associados a cada um dos muões. Nesse referencial os muões saem com uma velocidade (em relação à velocidade da luz) $\beta = \sqrt{1 - (2m/M)^2}$. Repare-se que um decaimento deste tipo só é possível se $M \geqslant 2m$, o que está garantido neste caso porque o J/ψ é cerca de 30 vezes mais massivo que o muão.

Do it yourself

Exercício (decaimento $H \to \gamma\gamma$):

Mostre que no decaimento uma partícula ultra-relativista em duas partículas sem massa existe um ângulo mínimo que essas particulas podem ter entre si.

Do it yourself

Solução:

Designemos por M a massa da partícula instável e (temporariamente) por m_1 e m_2 a massa das partículas resultantes. No referencial em que a partícula instável tem quadri-momento $\mathfrak{P}$, energia E e tri-momento $\vec{P}$ as partículas resultantes têm quadri-momentos $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$, energias E_1 e E_2, e tri-momentos $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ que fazem um ângulo Θ entre si. Em termos de quadri-momentos temos

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 \ .$$

Do it yourself

Solução:

Portanto

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathfrak{p}_1.\mathfrak{p}_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\Theta \ .$$

Por consequência

$$\cos\Theta = \frac{1}{2}\frac{2E_1\left(E - E_1\right) - \left(M^2 - m_1^2 - m_2^2\right)}{\sqrt{\left(E_1^2 - m_1^2\right)\left[\left(E - E_1\right)^2 - m_2^2\right]}} \ ,$$

Do it yourself

Solução:

Quando $m_1 = m_2 = 0$ a expressão anterior toma a forma

$$\cos\Theta = 1 - \frac{M^2}{2E_1\left(E - E_1\right)} \,,$$

ou ainda

$$E_1^2\left(1 - \cos\Theta\right) - E_1 E\left(1 - \cos\Theta\right) + \frac{M^2}{2} = 0 \,.$$

Do it yourself

Solução:

Esta equação tem duas soluções para E_1,

$$E_1 = \frac{1}{2}\left[E \mp \left(E^2 - \frac{2M^2}{1-\cos\Theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right] ,$$

que só são reais se

$$E^2 - \frac{2M^2}{1-\cos\Theta} \geqslant 0 , \tag{13}$$

Do it yourself

Solução:

ou ainda,

$$\cos\Theta \leqslant 1 - \frac{2M^2}{E^2} \ .$$

O ângulo Θ está portanto limitado sendo o lado direito da desigualdade no mínimo -1. Em particular, se a partícula mãe (de massa M) for produzida em repouso então $M = E$ e $\Theta = \pi$, sendo a desigualdade saturada como deve acontecer no referencial próprio da partícula mãe. Por isso a assinatura do decaimento $H \to \gamma\gamma$ do bosão de Higgs (que é produzido essencialmente em repouso) corresponde a dois fotões em direcções diametralmente opostas no detector.

Do it yourself

Solução: