Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Relatividade - Módulo 4: Dinâmica relativista

João Seixas

Instituto Superior Técnico

Ano lectivo 2022/2023

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Objectivos:

- Quadriforça
- O quadrimomento
- Equivalência massa-energia
- Momento angular relativista

A Lei de Newton em Relatividade

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

De acordo com os postulados da Relatividade Restrita as leis físicas, sejam elas quais forem, devem ser independentes do referencial de inércia escolhido pelo observador. Isto implica, nomeadamente, que a 2ª Lei de Newton, válida em referenciais nos quais os acontecimentos sob observação ocorrem com velocidades pequenas quando comparadas com a velocidade da luz, devem ser válidas em *todos* os referenciais de inércia. Isso implica, por sua vez, que o conceito de momento linear continua a fazer sentido na Relatividade Restrita.

A Lei de Newton em Relatividade

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Do mesmo modo, pelo facto de mudarmos do espaço euclidiano de Galileu para o espaço de Minkowski da Relatividade Restrita não deixamos de lado propriedades experimentalmente verificadas como a uniformidade e isotropia do espaço ou a uniformidade do tempo. Devemos por isso esperar que a conservação do momento linear, da energia e do momento angular continuem a ser válidos sempre que não há acções externas sobre um sistema.

Nada nos garante, todavia que a **forma** dessas quantidades continue a ser a mesma quando nos aproximamos da velocidade da luz no vácuo. A única coisa que podemos garantir é que para velocidades pequenas quando comparadas com a velocidade da luz no vácuo as expressões relativistas têm de retomar a expressões clássicas que sabemos ser válidas nesse caso.

O quadrimomento

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Tal como aconteceu no caso galileano vamos começar por analisar o momento linear. A conservação do momento linear tem de ser válida para todos os observadores em referenciais inerciais porque de outro modo violaríamos o postulado que obriga todas as equações da Física a terem a mesma forma em todos esses referenciais. Sendo assim a variação temporal do momento linear não pode depender do referencial escolhido. Se $\vec{p}$ for o momento linear do sistema, a única possibilidade é

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = 0 \tag{1}$$

em que τ é o tempo próprio que é, como sabemos, um invariante relativista.

O quadrimomento

Consideremos o caso de uma partícula livre de massa m com velocidade $\vec{V}$ num dado referencial. Para simplificar a discussão comecemos por colocar-nos num referencial de inércia em que $\vec{V} = (V, 0, 0)$ de modo a ter a velocidade apenas segundo uma só direcção, o que torna o problema unidimensional e nos permite eliminar a noção de vector. Façamos um *boost* ao longo da direcção do movimento para um referencial de inércia $\mathcal{K}$' no qual a partícula se move com uma velocidade V' (constante por causa de (1)) infinitesimalmente pequena em relação ao seu referencial próprio. Nesse caso é válida a aproximação não relativista $p' = mV'$ e o tempo nesse referencial é muito aproximadamente igual ao tempo próprio τ.

O quadrimomento

No referencial de inércia $\mathcal{K}$ original, em que a partícula tem velocidade V (constante porque V' é constante) relativamente a $\mathcal{K}$', a lei de adição de velocidades relativista diz-nos que p' será medido muito aproximadamente com o valor mV nesse referencial. Por consequência

$$\frac{d(mV)}{d\tau} = 0 \qquad .$$

Por outro lado, a dilatação do tempo (**??**) diz-nos que o tempo medido no referencial $\mathcal{K}$ está relacionado com o tempo próprio por

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

em que γ é o factor relativista associado à velocidade $\vec{V}$.

O quadrimomento

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Logo, a equação anterior diz-nos que

$$\frac{d(\gamma m V)}{dt} = 0 \qquad .$$

Ora, a conservação do momento linear no referencial $\mathcal{K}$, medida usando as grandezas físicas de espaço e de tempo nesse referencial, é

$$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad .$$

Somos assim forçados a concluir que

$$p = \gamma m V \qquad . \tag{2}$$

O quadrimomento

Facilmente se verifica que quando $V \to 0$ esta expressão retoma a forma não relativista $p = mV$ e portanto satisfaz os critérios necessários para ser uma extensão relativista do momento linear. Por outro lado, quando $V \to c$ o momento linear $p \to \infty$, o que implica de imediato que apenas partículas com massa $m = 0$ se podem deslocar à velocidade da luz Essas partículas são os fotões que desempenham por isso um papel único no Universo.

O quadrimomento

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

A expressão (2) para o momento linear pode ainda ser escrita na forma

$$p = m(\gamma V) = mu_x$$

onde u_x é a componente espacial da quadri-velocidade u definida em (**??**). Na realidade esta definição faz sentido porque a quadri-velocidade é a generalização natural da (tri-)velocidade a que estamos habituados da Relatividade de Galileu.
Caso se observe uma violação da conservação do momento linear da partícula a interpretação imediata é que uma qualquer acção externa influenciou o movimento do corpo. Essa acção externa é, por definição, uma força e tem de actuar da mesma forma para todos os observadores para não violar os postulados da Relatividade de Einstein.

A quadriforça

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Poderíamos (ingenuamente) assumir então que a força $\mathcal{F}$ estaria relacionada com o movimento da partícula através de

$$\frac{d(mu)}{d\tau} = \mathcal{F} \qquad ,$$

ou ainda, assumindo que a partícula não se parte em pedaços e que a direcção do movimento é a direcção do eixo dos xx,

$$\frac{d^2(mx)}{d\tau^2} = m\alpha = \mathcal{F}$$

em que α é a componente espacial da quadri-aceleração definida em (**??**). O problema é que esta definição não pode estar completa. Quer a quadri-velocidade, quer a quadri-aceleração são quadri-vectores que se transformam numa transformação de Lorentz combinando as componentes espaciais e temporais.

A quadriforça

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Portanto, para além da componente espacial da força, na Relatividade de Einstein tem de haver também uma componente **temporal** $\mathcal{F}^0$ da força. As equações de Newton têm então de ser da forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2(mx^0)}{d\tau^2} &= \mathcal{F}^0 \quad , \\ \frac{d^2(mx)}{d\tau^2} &= \mathcal{F} \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

em que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^0$ são as componentes espacial e temporal de uma **quadri-força** (também chamada **força absoluta**) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^0, \mathcal{F}, 0, 0)$.

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Por se tratar de um quadri-vector, quando passamos do referencial $\mathcal{K}$ para outro $\mathcal{K}''$ movendo-se com velocidade V' relativamente ao primeiro, as componentes de $\mathcal{F}$ transformam-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0\prime\prime} &= \gamma''(\mathcal{F}^0 - \beta''\mathcal{F}) \qquad , \\ \mathcal{F}'' &= \gamma''(\mathcal{F} - \beta''\mathcal{F}^0) \qquad , \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\beta'' = V'/c$ e o factor relativista γ'' é definido como

$$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \qquad .$$

A quadriforça

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

A equação de Newton é assim dada por

$$\frac{d(mu)}{d\tau} = \mathcal{F} \tag{5}$$

ou, usando o tempo $t = \gamma\tau$ medido no referencial em causa

$$\frac{d(mu)}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{\gamma} \quad . \tag{6}$$

Esta equação representa a 2ª Lei de Newton definida em termos do tempo t medido pelo observador no referencial $\mathcal{K}$ e envolvendo a quadri-força

$$F = \frac{\mathcal{F}}{\gamma} \tag{7}$$

Trabalho

As componentes espacial e temporal da quadri-força $\mathcal{F}$ estão relacionadas entre si por via do elemento invariante de distância

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (d\mathbf{x})^2 \qquad .$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\left[\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)^2\right] = \frac{1}{c^2}$$

que derivada de ambos os lados em ordem a τ permite concluir

$$\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} \qquad , \tag{8}$$

ou ainda, tendo em conta (3),

$$\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)\mathcal{F}^0 = \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)\mathcal{F} \qquad .$$

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Trabalho

Usando a definição (**??**) da quadri-velocidade concluímos então que

$$c\gamma\mathcal{F}^0 = u\mathcal{F} \qquad . \tag{9}$$

Tomemos a primeira das equações em (3) e utilizemos a relação que acabámos de encontrar entre as componentes da quadri-força para a reescrever na forma

$$\frac{d(mc^2\gamma)}{d\tau} = V\mathcal{F} \; .$$

Tendo em conta a definição (7) e usando de novo a relação entre o tempo próprio e o tempo t medido no referencial $\mathcal{K}$, temos

$$\frac{d(mc^2\gamma)}{dt} = FV = F\frac{dl}{dt} \qquad , \tag{10}$$

que pode ainda ser escrita na forma

$$d\left(mc^2\gamma\right) = F.dl \tag{11}$$

Energia

Ora o lado direito desta equação é nosso conhecido: trata-se do trabalho realizado por F no elemento de caminho dl. Isso significa que a quantidade

$$E = mc^2\gamma \tag{12}$$

é a energia, o que é corroborado por uma simples análise dimensional. Para confirmar que a quantidade E é a extensão relativista da energia do sistema é necessário demonstrar que para $V \ll c$ reencontramos a expressão clássica da energia cinética. Com efeito, expandindo o lado direito da equação anterior em potências de $\beta = V/c$,

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\beta^2 + \ldots \qquad .$$

Energia

Ou seja,

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 + \ldots \qquad ,$$

Portanto, a menos do factor mc^2, também designado por **energia em repouso** recuperamos de facto a energia cinética clássica quando $\beta \to 0$. Poderíamos então definir a energia cinética do sistema como

$$K = E - mc^2 \tag{13}$$

de modo a recuperar sempre a expressão clássica da energia cinética, o que não tem qualquer relevância na relação (10) e não impede a conservação da energia na ausência de forças (ou para forças conservativas) já que mc^2 é uma constante.

Energia

Vejamos o que acontece quando se usa a definição (12) no caso da desintegração de uma partícula no seu referencial próprio. Nesse caso a conservação da energia diz-nos que

$$Mc^2 = (m_1 + m_2)c^2 + K_1 + K_2$$

onde $K_i = E_i - m_i c^2$ ($i = 1, 2$) de acordo com a definição (13). O que se passa torna-se agora claro: a energia inicial do sistema, que é apenas energia em repouso, converte-se em parte em energia em repouso das partículas resultantes, em parte em energia cinética associada ao movimento dessas partículas. É importante perceber que a conversão só se dá desta forma no referencial próprio da partícula inicial. Em todos os outros referenciais a situação é mais complicada, com a presença quer da energia em repouso, quer da energia cinética de todas as partículas.

Do it yourself

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Exercício:

Um protão nos feixes do LHC (o maior acelerador do mundo localizado no CERN perto de Genebra na Suíça) tem uma energia de aproximadamente 7 TeV. Sabendo que a massa de um protão é 938.272081 MeV determine a velocidade desses protões e o seu momento linear no referencial do laboratório.

Do it yourself

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Solução:

No sistema de unidades naturais designemos por m a massa do protão (em unidades GeV/c^2) e E a sua energia. Usando a expressão de energia relativista podemos então escrever

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} = 0.999999991 \; .$$

A velocidade do protão difere 9.695 km/h da velocidade da luz!

Do it yourself

Solução:

O momento linear do protão é

$$p = mv\gamma = 6993.467 \text{ MeV} \ ,$$

não diferindo muito de E. Na verdade a energia em repouso do protão ($\sim$ 1 GeV) é cerca de 7000 vezes mais pequena do que a sua energia pelo que é quase irrelevante.

Quadrivector energia-momento

Observemos então os resultados que encontrámos para a energia e o momento linear relativistas:

$$\begin{aligned} E &= mcu^0 \ , \\ p &= mu \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Uma vez que a energia E e o momento linear p estão directamente relacionados com a quadri-velocidade o objecto $\mathfrak{p} = (E, pc)$ tem todas as propriedades requeridas para um quadri-vector dado que a sua transformação numa mudança de referencial é

$$\mathfrak{p}'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\mathfrak{p}^{\mu} \ , \tag{15}$$

onde a matriz Λ^{α}_{μ} é dada pelas transformações de Lorentz. Ele designa-se por **quadri-vector energia-momento** ou, abreviadamente, **quadri-momento** e é o conceito central de toda a cinemática relativista.

Quadrivector energia-momento

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

A norma desse vector tem um significado físico preciso:

$$\mathfrak{p}^2 = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \qquad , \tag{16}$$

isto é, a norma do quadri-vector energia-momento é simplesmente a energia em repouso. Este resultado é de extrema importância porque mostra que a norma deste quadri-vector é um invariante relativista.

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Repare-se que as relações (14) mostram, à semelhança do que foi feito para a Transformação de Lorentz (**??**), que a rapidez pode ser também definida em termos de elementos do quadri-vector energia-momento. Como as componentes deste quadri-vector se transformam como as componentes do vector de posição no espaço-tempo de Minkowski, para transformações entre referenciais que partilham o mesmo eixo dos zz, por exemplo, os *boosts* ao longo desse eixo podem ser escritos usando a rapidez

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \ , \tag{17}$$

definição que é adaptada a problemas de dinâmica relativista.

Quadrivector energia-momento

Repare-se que as relações (14) mostram, à semelhança do que foi feito para a Transformação de Lorentz (**??**), que a rapidez pode ser também definida em termos de elementos do quadri-vector energia-momento. Como as componentes deste quadri-vector se transformam como as componentes do vector de posição no espaço-tempo de Minkowski, para transformações entre referenciais que partilham o mesmo eixo dos *zz*, por exemplo, os *boosts* ao longo desse eixo podem ser escritos usando a rapidez

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \ , \tag{18}$$

definição que é adaptada a problemas de dinâmica relativista.

Do it yourself

Exercício:

Demonstre que uma partícula sem massa tem de ser estável, ou seja, não se pode desintegrar.

Do it yourself

Resposta:

Raciocinemos por absurdo. Suponhamos que a partícula de energia E finita tinha uma massa m infinitamente pequena e um tempo de decaimento não nulo. No referencial próprio da partícula ela viveria um tempo finito τ. Mas

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \,.$$

Do it yourself

Resposta:

Para qualquer outro observador o tempo medido seria

$$t = \tau \left(\frac{E}{mc^2} \right) .$$

Fazendo a massa tender para 0 vemos que $t \to \infty$. Logo, mesmo que a partícula tivesse um tempo de vida finito ele seria medido como infinito por todos os observadores que não estivessem no seu referencial próprio, sendo por isso a partícula estável para todos eles.

Momento angular relativista

O facto de a estrutura dinâmica natural para o espaço-tempo ser o quadri-vector energia momento obriga à reanálise da noção de momento angular, o que tem de ser feito com algum cuidado pois a generalização do conceito de rotação para o espaço de Minkowski não é obvia devido à estrutura quadri-dimensional deste espaço. Tomemos o momento angular $\vec{L}$ construído a partir da (tri-)posição e do (tri-)momento

$$L^i = c\varepsilon^{ijk} r_j p_k \ , \tag{19}$$

onde ε^{ijk} é o tensor completamente anti-simétrico e onde está implícita a convenção de Einstein para a soma de índices repetidos.

Momento angular relativista

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

A velocidade da luz c é aqui introduzida por consistência com a nossa definição para o quadri-vector energia-momento. Consideremos dois observadores em referenciais inerciais que se movem um em relação ao outro com uma velocidade $\vec{V}$. Para simplificar vamos assumir que os referenciais são escolhidos de tal forma que os eixos dos dois referenciais se movem paralelamente entre si e que o eixo dos xx é comum aos dois observadores. A transformação de Lorentz para a posição é então

$$
\begin{aligned}
x_0' &= \gamma(V)\left(x_0 - \beta x_1\right) \ , \\
x_1' &= \gamma(V)\left(x_1 - \beta x_0\right) \ , \\
x_2' &= x_2 \ , \\
x_3' &= x_3 \ .
\end{aligned}
$$

Momento angular relativista

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Para o quadri-vector energia-momento é (não esquecer que o tri-momento relativista $\vec{\mathfrak{p}}$ foi definido com o factor multiplicativo c)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_0' &= \gamma(V)\left(\mathfrak{p}_0 - \beta\mathfrak{p}_1\right) \ , \\
\mathfrak{p}_1' &= \gamma(V)\left(\mathfrak{p}_1 - \beta\mathfrak{p}_0\right) \ , \\
\mathfrak{p}_2' &= \mathfrak{p}_2 \ , \\
\mathfrak{p}_3' &= \mathfrak{p}_3 \ ,
\end{aligned}
$$

com $\beta = V/c$.

Momento angular relativista

À semelhança do que acontece no caso newtoniano

$$
\begin{aligned}
L_1' &= L_1 \ , \\
L_2' &= \gamma(V)\left[L_2 - \beta\left(x_3\mathfrak{p}_0 - x_0\mathfrak{p}_3\right)\right] \ , \\
L_3' &= \gamma(V)\left[L_3 + \beta\left(x_2\mathfrak{p}_0 - x_0\mathfrak{p}_2\right)\right] \ .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Definamos o (tri-)vector $\vec{\mathfrak{L}}$ de componentes

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_1 &= x_1\mathfrak{p}_0 - x_0\mathfrak{p}_1 \ , \\
\mathfrak{L}_2 &= x_2\mathfrak{p}_0 - x_0\mathfrak{p}_2 \ , \\
\mathfrak{L}_3 &= x_3\mathfrak{p}_0 - x_0\mathfrak{p}_3 \ .
\end{aligned}
$$

Momento angular relativista

Tendo em conta que $\vec{\beta} = \vec{V}/c$ só tem componente segundo x_1 podemos então escrever

$$\vec{L}' = \gamma\left(\vec{L} + \vec{\beta} \times \vec{\mathfrak{L}}\right) \ . \tag{21}$$

Este resultado pode ser generalizado para qualquer $\vec{\beta}$ com componentes arbitrárias em qualquer direcção. E fácil demonstrar que para uma partícula isolada o momento angular se conserva em todos os referenciais inerciais. Também é fácil demonstrar que as componentes de $\vec{\mathfrak{L}}$ também são afectadas pela transformação de Lorentz e que a sua lei de transformação é

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}'_1 &= \mathfrak{L}_1 \ , \\
\mathfrak{L}'_2 &= \gamma(V)\left(\mathfrak{L}_2 + \beta L_3\right) \ , \\
\mathfrak{L}'_3 &= \gamma(V)\left(\mathfrak{L}_3 - \beta L_2\right) \ ,
\end{aligned} \tag{22}$$

Momento angular relativista

Tendo em conta que $\vec{\beta} = \vec{V}/c$ só tem componente segundo x_1 podemos então escrever

$$\vec{L}' = \gamma \left(\vec{L} + \vec{\beta} \times \vec{\mathfrak{L}} \right) \quad . \tag{23}$$

Em forma vectorial,

$$\vec{\mathfrak{L}}' = \gamma \left(\vec{\mathfrak{L}} - \vec{\beta} \times \vec{L} \right) \quad . \tag{24}$$

As componentes temporais e espaciais transformam-se, como se vê, de forma muito semelhante, havendo um grande paralelismo entre a forma como se comportam na mudança de referencial.

Momento angular relativista

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

O aparecimento de componentes espaço-temporais na estrutura do momento angular confirma no fundo a noção de rotação espaço-temporal que já encontrámos. Existem agora também rotações nos hiperplanos subentendidos pela direcção temporal e uma direcção espacial, que não podem todavia ser incluídas na definição (19). No entanto, se aceitarmos deixar para trás a noção de vector para caracterizar o momento angular é possível generalizar a definição de forma a ter uma representação unificada. Observando a definição (19) vemos que existe uma possibilidade de incorporar todas as componentes num **tensor** de ordem 2 anti-simétrico

$$\mathfrak{M}^{\alpha\beta} = x^\alpha \mathfrak{p}^\beta - \mathfrak{p}^\alpha x^\beta \; . \tag{25}$$

Introdução
Força e momento
Trabalho e Energia
Equivalência Massa-Energia
Momento angular

Uma quantidade anti-simétrica deste tipo designa-se por **bi-vector** e pode ser expressa matricialmente como

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathfrak{L}^1 & -\mathfrak{L}^2 & -\mathfrak{L}^3 \\ \mathfrak{L}^1 & 0 & L^3 & -L^2 \\ \mathfrak{L}^2 & -L^3 & 0 & L^1 \\ \mathfrak{L}^3 & L^2 & -L^1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{26}$$

A transformação de Lorentz entre referenciais induz neste objecto a lei de transformação (o que é característico de um tensor),

$$\mathfrak{M}'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}\mathfrak{M}^{\mu\nu} . \tag{27}$$

onde os elementos $\Lambda^{\gamma}_{\delta}$ da transformação são dados pela transformação de Lorentz.

Momento angular relativista

O resultado geral para a transformação do momento angular em termos vectoriais é

$$\begin{aligned}\vec{L}' =&\gamma(\vec{V})\left(\vec{L}+\vec{V}\times\vec{\mathfrak{L}}\right)-\left[\gamma(\vec{V})-1\right]\left(\vec{L}.\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2}\ ,\\ \vec{\mathfrak{L}}' =&\gamma(\vec{V})\left(\vec{\mathfrak{L}}-\frac{1}{c^2}\vec{V}\times\vec{L}\right)-\left[\gamma(\vec{V})-1\right]\left(\vec{\mathfrak{L}}.\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2}\ .\end{aligned} \tag{28}$$