Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Relatividade - Módulo 3: A Relatividade de Einstein

João Seixas

Instituto Superior Técnico

Ano lectivo 2022/2023

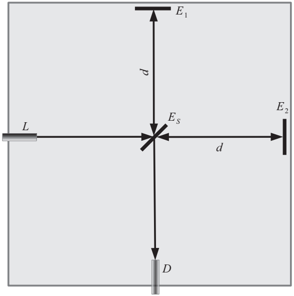
Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Objectivos:

- Conceitos básicos
- A dilatação do tempo
- A contracção do espaço
- Exemplos de aplicação

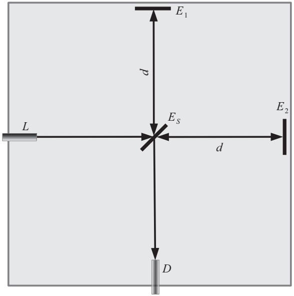
A dilatação do tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



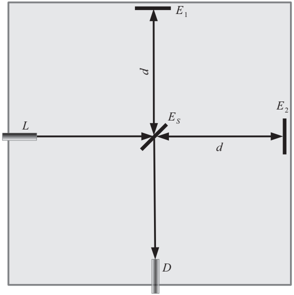
Como vimos, a invariância da velocidade da luz no vácuo faz com que o tempo deixe de ser uma grandeza universal, igual para todos os observadores, como era assumido na Relatividade de Galileu De facto, do ponto de vista galileano o raio de luz emitido em direcção a M_1 propagar-se-ia para $\mathcal{K}_1$ com a velocidade $c + V$, enquanto o que é emitido em direcção a M_2 se propagaria com a velocidade $c - V$.

A dilatação do tempo



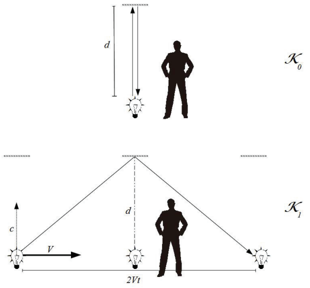
Por consequência o tempo para o primeiro raio seria $(c+V)t/(c+V)=t$ e para o segundo seria $(c-V)t/(c-V)=t$ levando à igualdade dos tempos de chegada para os dois observadores. Mas como a velocidade da luz tem de ser a mesma para todos os observadores a lei de adição de velocidades não pode manter-se em Relatividade Restrita.

A dilatação do tempo



Concluímos assim que também a lei de adição de velocidades tem de ser revista por forma a acomodar a constância da velocidade da luz para todos os observadores

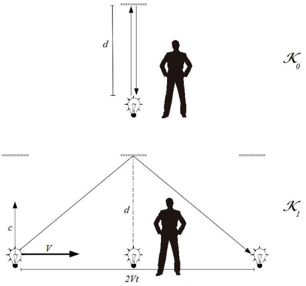
A dilatação do tempo



Para quantificar melhor as consequências das observações anteriores, numa situação próxima da encontrada na experiência de Michelson-Morley, analisemos o caso em que o observador $\mathcal{K}_0$ envia um raio luminoso segundo o eixo dos zz em direcção a um espelho situado a uma distância d, tal como está representado na Figura.

A dilatação do tempo

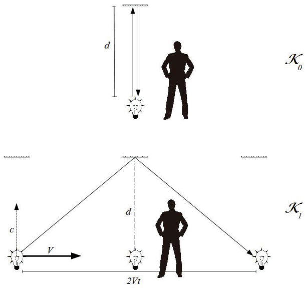
Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



Os percursos do raio de luz da lâmpada até ao espelho e do espelho de novo até ao observador são totalmente idênticos, pelo que consideraremos apenas a primeira parte.

A dilatação do tempo

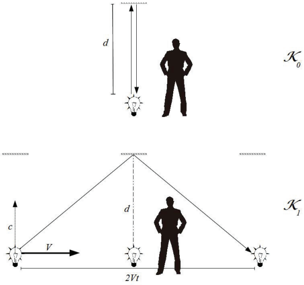
Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



Os percursos do raio de luz da lâmpada até ao espelho e do espelho de novo até ao observador são totalmente idênticos, pelo que consideraremos apenas a primeira parte.

A dilatação do tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



Para $\mathcal{K}_0$

$$t' = \frac{d}{c} \ , \tag{1}$$

enquanto para o observador $\mathcal{K}_1$ é

$$c^2 t^2 = d^2 + V^2 t^2 \ . \tag{2}$$

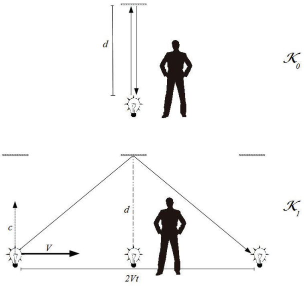
A dilatação do tempo

Introdução

Dilatação do tempo

Contracção do espaço

A estrutura do espaço-tempo

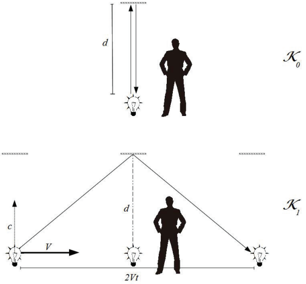


Ou seja,

$$t = \frac{d}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{\frac{d}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \, . \tag{3}$$

A dilatação do tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

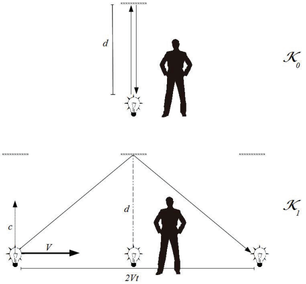


Mas d/c é precisamente o tempo t' de chegada do raio luminoso ao espelho visto por $\mathcal{K}_0$, pelo que

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,. \tag{4}$$

A dilatação do tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



ou ainda,

$$t = \gamma t' \tag{5}$$

em que

$$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

é o chamado **factor relativista**.

A dilatação do tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

O tempo medido por $\mathcal{K}_1$ é assim **maior** que o tempo medido em $\mathcal{K}_0$ e depende da velocidade relativa dos dois observadores. Este resultado, que é uma consequência directa da constância da velocidade da luz para todos os observadores, dá pelo nome de **dilatação do tempo**. O tempo medido para o fenómeno é mínimo no referencial de $\mathcal{K}_0$ em que a experiência decorre (também designado por **referencial próprio** da experiência) sendo maior para todos os observadores que se movam em relação a ele com uma velocidade não nula.

A dilatação do tempo

Repare-se que quando $V \ll c$, $t \approx t'$, recuperando-se assim a universalidade galileana do tempo. O Princípio da Relatividade de Galileu não é pois universalmente inválido: para todos os observadores movendo-se uns relativamente aos outros com velocidades muito pequenas quando comparadas com a velocidade da luz o tempo aparece como muito aproximadamente igual para todos. Nem poderia deixar de ser assim, já que a Relatividade de Galileu descreveu com grande sucesso os fenómenos físicos enquanto a precisão das medições não permitiu levar em conta os efeitos da velocidade finita da luz.

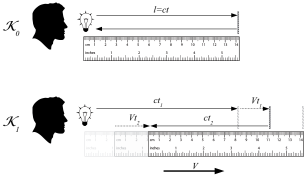
A contracção do espaço

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Resolvida a questão da medição dos tempos vamos agora debruçar-nos sobre os comprimentos medidos pelos observadores $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K}_1$. De novo a luz para é usada para essa medição já que é a quantidade que lhes é comum. A metodologia é simples e utiliza o nosso resultado de medição dos tempos. Dois raios de luz são enviados por $\mathcal{K}_0$ simultaneamente, um segundo o eixo dos xx e outro dos zz, estando em cada um dos eixos colocado um espelho à distância l no qual cada raio de luz vai ser reflectido. Como anteriormente, o observador $\mathcal{K}_1$, movendo-se em relação a $\mathcal{K}_0$ com uma velocidade V ao longo do eixo comum dos xx, vai observar o movimento dos raios luminosos e tentar encontrar um método de comparação das suas medições com as realizadas por $\mathcal{K}_0$.

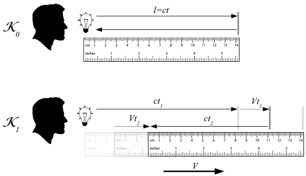
A contracção do espaço

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



O comprimento percorrido pelos raios luminosos entre o início e o fim do comprimento l a medir será dado pelo tempo de ida e volta entre esses pontos multiplicado pela velocidade da luz. Na Figura está esquematizado o que vêm os dois observadores ao longo do eixo dos *xx* (**nota importante**: a posição dos observadores não foi escolhida ao acaso e o resultado que se segue depende dessa posição e do modo de medição do comprimento)

A contracção do espaço

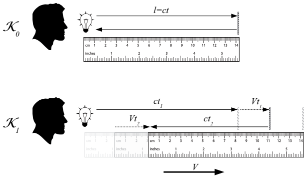


Observador $\mathcal{K}_0$: Os espelhos estão em repouso. O comprimento ao longo de x é dado por

$$l' = \frac{ct'}{2} \, . \tag{7}$$

onde t' é o tempo de ida e volta para o raio luminoso.

A contracção do espaço



Observador $\mathcal{K}_1$: Na primeira parte do percurso temos

$$l + Vt_1 = ct_1 \ , \tag{8}$$

enquanto na segunda parte do percurso temos

$$l - Vt_2 = ct_2 \tag{9}$$

e logo

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \ . \tag{10}$$

Introdução

Dilatação do tempo

Contracção do espaço

A estrutura do espaço-tempo

Por outro lado, o raio luminoso enviado segundo zz permite-nos escrever, segundo o resultado (4) anterior,

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \; ,$$

ou seja,

$$l = ct'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \; .$$

Mas $ct' = l'$, a distância percorrida pelo raio luminoso ao longo do eixo dos xx medida por $\mathcal{K}_0$. Chegamos assim à relação existente entre os comprimentos medidos por $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K}_1$:

$$l = l'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \; . \tag{11}$$

A contracção do espaço

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

O comprimento medido pelo observador $\mathcal{K}_1$ é pois **menor** que o medido por $\mathcal{K}_0$, resultado que dá pelo nome de **contracção do espaço**. No referencial próprio (ou seja, no de $\mathcal{K}_0$) o comprimento é máximo; em qualquer outro que se mova em relação a ele com uma velocidade não nula o comprimento será menor. Mais uma vez, para $V \ll c$, $l \approx l'$ e recuperamos o resultado galileano usual.

A contracção do espaço

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Os postulados da Relatividade Restrita de Einstein levam a uma nova imagem da Natureza em que tanto as medidas de distância, como as de tempo, dependem do observador. Tempo e espaço passam a estar indissoluvelmente ligados por força da universalidade da velocidade da luz no vácuo. Deixamos de poder falar de espaço e tempo como grandezas descorrelacionadas para passar a falar de **espaço-tempo** em que as duas grandezas estão em pé de igualdade. Todos os acontecimentos na Natureza passam a ser identificados por **eventos** no espaço-tempo quadri-dimensional com coordenadas $(t, \vec{x})$ indicando, no instante t, em que lugar $\vec{x}$ o acontecimento teve lugar.
Resta saber quais as características desta nova entidade. É o que faremos de seguida.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução

Dilatação do tempo

Contracção do espaço

A estrutura do espaço-tempo

Suponhamos que um dado observador, visto de um dado referencial inercial, se encontra num dado instante t_0 num dado ponto $\vec{r}_0$ do espaço. Como a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal e um máximo não ultrapassável, existem pontos do espaço-tempo com os quais o observador não pode contactar. A partir de $(t_0, \vec{r}_0)$ só poderão ser acessíveis no passado e no futuro pontos $(t, \vec{r})$ que possam, no máximo, ser atingidos por um sinal luminoso.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Para simplificar a notação, sem perda de generalidade, vamos assumir que $(t_0, \vec{r}_0) = (0, \vec{0})$. Para que um observador em $(t, \vec{r})$ no futuro (ou no passado) possa comunicar com o que está em $(0, \vec{0})$ é imprescindível que um sinal com uma velocidade de propagação inferior ou igual à velocidade da luz no vácuo possa ser trocado entre eles. Imaginemos que o observador $\mathcal{K}_0$ em $(0, \vec{0})$ acende uma luz pontual. Uma onda esférica de luz vai propagar-se com um raio $R = ct$ que aumenta com o tempo segundo a relação

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \ . \tag{12}$$

Todos os pontos do espaço-tempo que podem no instante t estar ligados ao ponto $(0, \vec{0})$ encontram-se dentro dessa esfera. Note-se que a relação (12) é válida para todos os observadores devido à invariância da velocidade da luz no vácuo c. A relação de causalidade está assim garantida para todos eles.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Consideremos agora que o observador $\mathcal{K}_0$ presencia dois eventos E_0 e E_1 correspondendo, por exemplo, à emissão de um estampido na origem do seu referencial e a recepção do som num ponto Δx metros mais longe no eixo dos xx do seu referencial. Sem perda de generalidade vamos assumir que o primeiro evento ocorre para $t_0 = 0$ (podemos sempre escolher a origem dos tempos para que assim seja) e o outro Δt segundos depois. Em coordenadas de espaço-tempo, os eventos ocorrem neste referencial em $E_0 = (0,0,0,0)$ e $E_1 = (\Delta t, \Delta x, 0, 0)$. Consideremos a grandeza $\Delta s^2(E_i, E_j)$ definida genericamente por

$$\Delta s^2(E_i, E_j) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \ . \tag{13}$$

onde Δx, Δy, Δz e Δt são as diferenças das coordenadas espaço-temporais para os eventos E_i e E_j.

A estrutura do espaço-tempo

Para $\mathcal{K}_0$ esta grandeza toma o valor

$$\Delta s_0^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \ .$$

Em $\mathcal{K}_0$ a posição Δx tem de ser tal que $\Delta x = V \Delta t$ onde V é a velocidade do som.

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Consideremos um observador $\mathcal{K}_1$ movendo-se com a velocidade $\vec{V}$ do som em relação a $\mathcal{K}_0$. Como podemos sempre decidir qual a origem do referencial e quando decidimos começar a medir os tempos vamos assumir que ele passa no ponto do espaço onde ocorre o estampido no momento em que ele tem lugar e que se desloca para o ponto em que ocorre a recepção ao longo do eixo dos xx. A velocidade relativa é, pois, $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Para o o observador $\mathcal{K}_1$ os dois eventos ocorrem no mesmo local (a origem do referencial), o que faz com que, para ele, a grandeza (13) tome o valor Δs_1^2 dado por

$$\Delta s_1^2 = c^2 \Delta \tau^2 \ .$$

onde $\Delta \tau$ designa o instante em que o segundo evento ocorre para $\mathcal{K}_1$. Usando a dilatação do tempo, temos

A estrutura do espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Usando a dilatação do tempo, temos

$$c^2\Delta t^2 = \frac{c^2\Delta\tau^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

e logo

$$\Delta s_0^2 = c^2\Delta t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) = c^2\Delta t^2 - V^2\Delta t^2 \ .$$

Mas, como vimos acima, $V\Delta t = \Delta x$, pelo que

$$\Delta s_0^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s_1^2 \ ,$$

concluindo-se assim que a grandeza (13) é a mesma para os dois observadores.

A estrutura do espaço-tempo

A velocidade do som é, na verdade, irrelevante nesta discussão. Para a argumentação anterior ser válida basta que os dois pontos no espaço-tempo possam ser ligados por um sinal propagando-se com velocidade $V \leqslant c$, que pode ser diferente para observadores diferentes. Se um outro observador qualquer $\mathcal{K}_2$ observar os mesmos acontecimentos nos pontos $E_0' = (0, 0, 0, 0)$ e $E_1' = (\Delta t', \Delta x', 0, 0)$, correspondendo a uma velocidade de propagação do sinal igual a $\vec{V}^{\parallel} = (V_x^{\parallel}, 0, 0)$ nesse referencial, podemos usar exactamente o mesmo argumento que anteriormente para comparação com a observação no referencial próprio $\mathcal{K}_1$.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Se o referencial $\mathcal{K}_2$ estiver rodado relativamente a $\mathcal{K}_1$ basta usar uma rotação para reencontrar a situação anterior. Isso não afecta o argumento porque as rotações espaciais não afectam o termo Δt^2 e deixam invariante Δx^2. Isso indica que Δs^2 toma o mesmo valor (igual ao que é obtido no referencial próprio) para **todos** os observadores que presenciam os dois eventos naquelas coordenadas espaço-temporais e que portanto é um **invariante** na Relatividade de Einstein.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

A quantidade Δs^2 é uma grandeza fundamental já que as suas propriedades permitem estudar a estrutura do espaço-tempo e catalogar os observadores, especificando nomeadamente as suas relações causais:

- $\Delta s^2 \geqslant 0$ para todos os pontos do espaço-tempo que possam ser contactados por um sinal propagando-se com uma velocidade $V \leqslant c$. Em particular, para todos os pontos que só possam ser ligados por um sinal luminoso no vácuo tem-se $\Delta s^2 = 0$.
- Tomada como função dos pontos E_1 e E_2 do espaço-tempo, Δs^2 é uma grandeza simétrica, ou seja $\Delta s^2(E_1, E_2) = \Delta s^2(E_2, E_1)$.

A estrutura do espaço-tempo

Introdução

Dilatação do tempo

Contracção do espaço

A estrutura do espaço-tempo

- Voltemos ao referencial $\mathcal{K}_0$ em que os eventos acontecem na origem mas em instantes de tempo diferentes. Consideremos agora três eventos E_0, E_1 e E_2 ocorrendo nos instantes t_0, t_1 e t_2 tais que $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. Nesse caso

$$\begin{aligned}\Delta s^2(E_0, E_2) &= c^2(t_0 - t_2)^2 = c^2(t_0 - t_1 + t_1 - t_2)^2 = \\ &= c^2(t_0 - t_1)^2 + c^2(t_1 - t_2)^2 + 2c^2(t_0 - t_1)(t_1 - t_2)\end{aligned} \tag{14}$$

e, dado os três eventos estarem ordenados no tempo, concluímos

$$\Delta s^2(E_0, E_2) \leqslant \Delta s^2(E_0, E_1) + \Delta s^2(E_1, E_2) \ . \tag{15}$$

Como Δs^2 é um invariante esta relação é válida para todos os observadores.

A estrutura do espaço-tempo

Estas três propriedades fazem de Δs^2 a quantidade ideal para a definição de distância no espaço-tempo, lembrando-nos sempre que agora entre dois eventos ela pode ser nula sem que eles sejam coincidentes no espaço. A distância Δs^2 definida em (13) designa-se por **distância de Minkowski**. O espaço-tempo com esta distância designa-se por **Espaço de Minkowski**.

Intervalos no espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Sejam E_1 e E_2 dois eventos no espaço-tempo. Como a distância de Minkowski não é uma grandeza necessariamente positiva temos as seguintes possibilidades para os intervalos espaço-temporais:

$\boldsymbol{\Delta s^2(E_1, E_2) > 0}$**:** (**intervalo do tipo tempo**) Os dois eventos podem ser ligados por um sinal movendo-se com velocidade $V < c$. A relação entre E_1 e E_2 é causal sendo a conexão temporal entre os dois eventos sempre a mesma. A Física usual ocorre unicamente neste tipo de intervalos.

Intervalos no espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Sejam E_1 e E_2 dois eventos no espaço-tempo. Como a distância de Minkowski não é uma grandeza necessariamente positiva temos as seguintes possibilidades para os intervalos espaço-temporais:

$\Delta s^2(E_1, E_2) = 0$: (*intervalo nulo*) Os eventos só podem ser ligados entre si por um sinal movendo-se com velocidade V igual à velocidade da luz no vácuo. Estes intervalos também obedecem ao princípio de causalidade mas, como veremos mais à frente, só são acessíveis a partículas elementares sem massa.

Intervalos no espaço-tempo

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Sejam E_1 e E_2 dois eventos no espaço-tempo. Como a distância de Minkowski não é uma grandeza necessariamente positiva temos as seguintes possibilidades para os intervalos espaço-temporais:

$\mathbf{\Delta s^2(E_1, E_2) < 0}$: (**intervalo do tipo espaço**) Eventos separados por um intervalo deste tipo nunca podem comunicar entre si pois isso equivaleria a ter sinais deslocando-se com velocidades superiores à da luz no vácuo, o que é impossível com os postulados de Einstein. Os fenómenos associados a eventos deste tipo violam o princípio de causalidade e por isso não podem ser considerados em Física em condições normais.

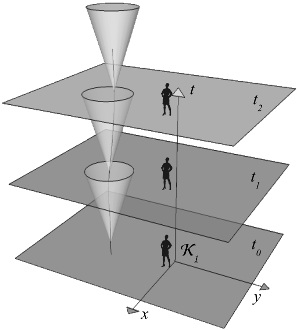
Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Dado que as interacções causais entre dois eventos só podem ocorrer para intervalos do tipo tempo ou nulo, em cada ponto E do espaço-tempo um sistema físico tem o seu futuro E' restringido a um **cone de luz** definido pela relação

$$\Delta s^2(E, E') \geqslant 0 \ .$$

A sua trajectória espaço-temporal ou **linha de universo** vista por um dado observador $\mathcal{K}_1$, está assim em cada ponto delimitada pelo cone de luz aberto à sua frente.

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo



É obviamente impossível representar esta linha no espaço tempo quadri-dimensional, mas é possível ter uma ideia da evolução para um ponto material movendo-se num plano, como está esquematicamente representado. Neste caso o ponto material move-se no plano (x, y) e a sua posição vai ser (x_0, y_0) no instante t_0, (x_1, y_1) no instante t_1, etc. No espaço-tempo o mesmo ponto material desloca-se ao longo de uma trajectória tridimensional em (x, y, t). Em cada ponto dessa trajectória o conjunto de pontos (x', y') acessíveis no instante seguinte t' está delimitado pelo cone de luz.

Quadri-velocidade

Se temos uma evolução no espaço-tempo, é natural pensar numa quadri-velocidade u que será tangente à linha de universo em cada ponto do espaço-tempo. Para isso precisamos de definir uma grandeza natural para parametrizar a linha de forma a identificar de forma precisa a localização ao longo da evolução. Sabemos que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores e sabemos também que Δs^2 também é um invariante. A grandeza

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} \,, \tag{16}$$

onde

$$\Delta s = \sqrt{\Delta s^2} \,,$$

tem portanto o mesmo valor para todos os observadores. Ela tem a dimensão de tempo e funciona como uma espécie de "tempo universal".

Quadri-velocidade

Introdução

Dilatação do tempo

Contracção do espaço

A estrutura do espaço-tempo

Em particular, para um observador em repouso ela toma o valor $\Delta\tau = \Delta t$ e portanto esta quantidade mais não é que o tempo medido por esse observador, ou seja, o seu **tempo próprio**.

O comprimento de uma curva pode ser usado para parametrizar essa mesma curva. Para dois pontos a uma distância infinitesimal no espaço-tempo a distância entre eles é ds o que corresponde ao comprimento (infinitesimal) da linha de universo que os une. Para dois pontos separados por uma distância finita temos de tomar o integral

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\int_{s_0}^{s} ds = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \ .$$

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Quadri-velocidade

Para um outro observador, que não o observador no referencial próprio para o qual o tempo é τ, temos de usar (5) e fazer a correspondente mudança de variáveis no integral

$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\gamma} \ . \tag{17}$$

Repare-se que nesta expressão o factor relativista γ só pode sair do integral se a velocidade relativa $\vec{V}$ entre o referencial próprio e o referencial do observador for constante no tempo. A quantidade $d\tau = ds/c$ pode ser usada, portanto, para uma descrição intrínseca da curva. Para simplificar a notação costuma definir-se como coordenada temporal x^0 para um evento no espaço-tempo não o tempo t mas o produto ct entre a velocidade da luz e o tempo.

Quadri-velocidade

Com esta convenção a definição natural de tangente à linha de universo no ponto $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ é

$$u = \frac{dx}{d\tau} \ , \tag{18}$$

que tem por componentes

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau}, \quad & u^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} \\ u^2 &= \frac{dx^2}{d\tau}, \quad & u^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} \end{aligned} \tag{19}$$

Esta quantidade, que representa a velocidade no espaço de Minkowski, designa-se por **quadri-velocidade**.

Quadri-velocidade

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Para o observador $\mathcal{K}_1$ que observa a linha de universo o ponto material move-se no espaço com a velocidade $\vec{v}$. A componente temporal x^0 do ponto na linha de universo é o tempo medido pelo observador $\mathcal{K}_1$. A sua derivada com respeito ao tempo próprio corresponde fisicamente à variação do tempo medido por $\mathcal{K}_1$ relativamente ao que é medido pelo observador $\mathcal{K}_0$ movendo-se com o ponto material e em relação ao qual o ponto material está em repouso. Usando (5),

$$x^0 = c\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\gamma\tau \tag{20}$$

e, por consequência,

$$u^0 = c\gamma \ .$$

Quadri-velocidade

Esta componente mede assim de quanto o relógio do observador $\mathcal{K}_1$ atrasa relativamente ao do observador $\mathcal{K}_0$, ou seja, a "velocidade" com que o tempo de $\mathcal{K}_1$ passa relativamente ao tempo de $\mathcal{K}_0$.
As componentes espaciais u^1, u^2 e u^3 têm de ser calculadas com algum cuidado uma vez que nem o tempo, nem o espaço na Relatividade de Einstein são idênticos para todos os observadores. Isso significa que a variação do espaço com o tempo tem de ser calculada usando quantidades relativas ao mesmo observador. Portanto a determinação das componentes espaciais da quadri-velocidade tem de passar por quantidades medidas por $\mathcal{K}_1$. Usando (20) concluímos assim que as componentes espaciais da quadri-velocidade são

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^0}{d\tau} = \gamma v^i \qquad (i = 1, 2, 3) \; . \tag{21}$$

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Quadri-velocidade

A quadri-velocidade tem pois por componentes

$$u = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \ . \tag{22}$$

Quadri-aceleração

Embora um pouco mais laborioso, o cálculo da **quadri-aceleração** $\alpha = du/d\tau$ é igualmente simples. Usando mais uma vez a relação entre o tempo t num dado referencial em movimento e o tempo próprio τ temos

$$\alpha = \frac{du}{d\tau} = \gamma \frac{du}{dt} \qquad ;$$

por outro lado, no caso mais geral em que a velocidade $\vec{v}$ depende do tempo t,

$$\begin{aligned} \alpha^0 =& c\gamma\dot{\gamma} \ , \\ \alpha^i =& \gamma\dot{\gamma}v^i + \gamma^2 a^i \quad i = 1, 2, 3 \ , \end{aligned}$$

onde o ponto designa, como sempre, a derivada em ordem a t e $a^i = \dot{v}^i$ são as componentes espaciais da aceleração medidas pelo observador em movimento.

Quadri-aceleração

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

Derivando o factor relativista γ,

$$\begin{aligned} \alpha^0 =& \gamma^4 \frac{\vec{v}.\vec{a}}{c} \ , \\ \alpha^i =& \gamma^4 \frac{\vec{v}.\vec{a}}{c^2} v^i + \gamma^2 a^i \quad i = 1, 2, 3 \ . \end{aligned} \tag{23}$$

É fácil de demonstrar que a quadri-aceleração é perpendicular à quadri-velocidade em cada ponto da linha de universo . É possível demonstrar que o módulo da quadri-aceleração num dado ponto corresponde à curvatura da linha de universo nesse ponto. Fisicamente, a curvatura, que é um escalar invariante, corresponde, por sua vez, à aceleração que o sistema sofre no referencial próprio ao deslocar-se ao longo da linha de universo.

Quadri-aceleração

Introdução
Dilatação do tempo
Contracção do espaço
A estrutura do espaço-tempo

A distância de Minkowski inclui a distância de euclidiana no seu sector espacial. Isso implica que as transformações de rotação, translação espacial, bem como transformações discretas como a de paridade continuarão a deixar invariante a distância no espaço de Minkowski. A estrutura da parte temporal da distância de Minkowski permite também concluir que a translação temporal e a reflexão temporal $t \to -t$ serão igualmente simetrias do espaço-tempo. Todavia a junção da estrutura espacial e temporal resultante da invariância da velocidade da luz vai obrigar a uma redefinição das transformações entre observadores em movimento. É sobre essas transformações que agora nos iremos debruçar.