Física I

LEIC-T 2021-2022

Prof. Pedro Abreu
pedro.t.abreu@técnico.ulisboa.pt

2ª Aula

Movimento de um ponto material no espaço–tempo a 2D;
Movimento circular;
Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas;
As 3 Leis de Newton;
A Lei da Gravitação Universal;
Referenciais inerciais e referenciais acelerados.

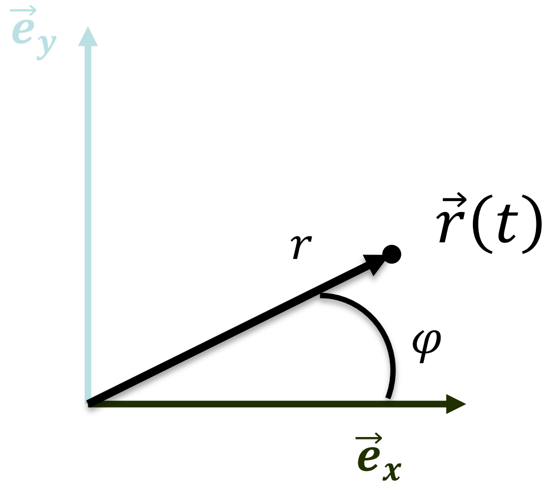
Deus não joga aos dados!

Albert Einstein (1879 – 1955; Prémio Nobel 1921)

2D

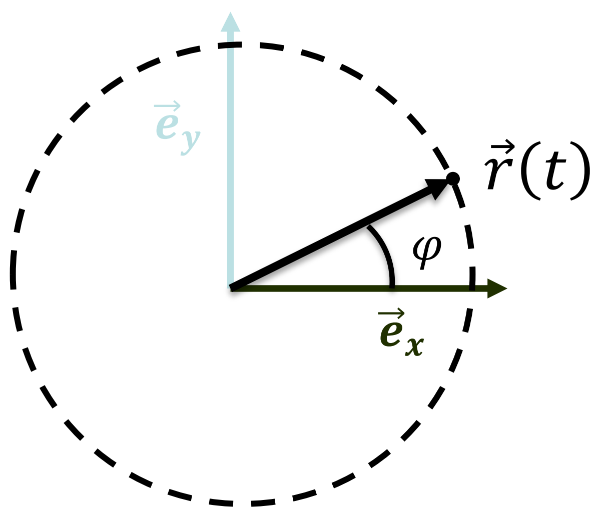
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow x(t), y(t) \qquad \vec{v}(t) = \dot{x}\,(t)\vec{e}_x + \dot{y}\,(t)\vec{e}_y \Rightarrow \dot{x}(t), \dot{y}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\,(t)\vec{e}_x + \ddot{y}\,(t)\vec{e}_y \Rightarrow \ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$$



Se constrangimento adicional: r constante

$\Rightarrow$ MOVIMENTO **CIRCULAR**

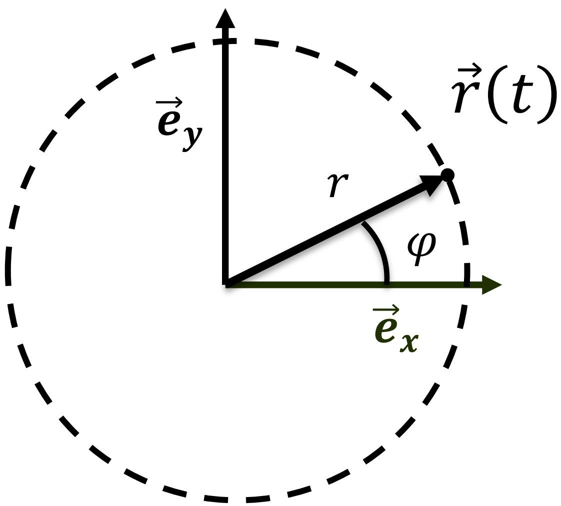


Se velocidade angular (ω) constante:

MOVIMENTO CIRCULAR **UNIFORME**

$$\omega \equiv \dot{\varphi}$$

2D MOVIMENTO **CIRCULAR** [UNIFORME]



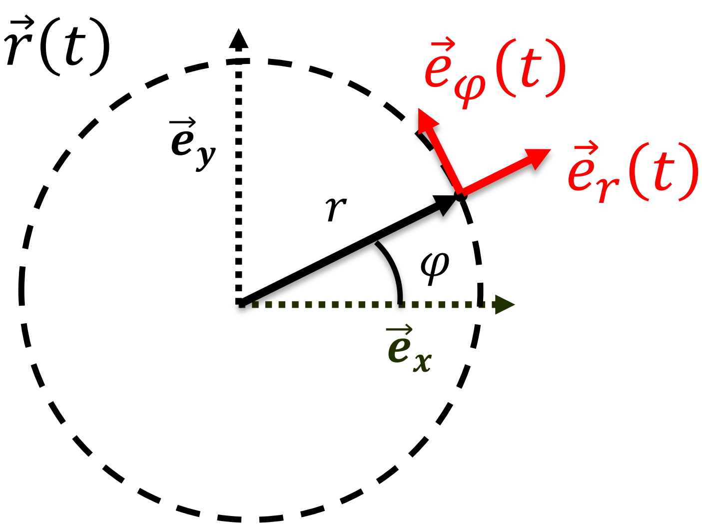
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow x(t), y(t)$$

mas com $x(t), y(t) = \pm\sqrt{R^2 - x^2(t)}$

QUE HORROR!!!

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x \pm \frac{\cdots}{\sqrt{R^2 - x^2(t)}}\vec{e}_y$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + [\ldots !!!]\vec{e}_y$$

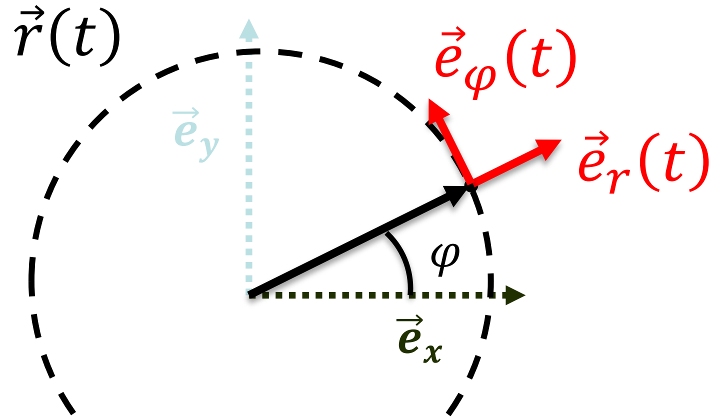


$\vec{e}_r(t) = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y$ versor radial

$\vec{e}_\varphi(t) = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$ versor polar

COORDENADAS **POLARES** (r, φ)

2D Coordenadas polares



$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) = r\vec{e}_r \Leftrightarrow$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$\dot{\vec{e}}_r =?= \frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\vec{e}}_r = -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_y = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_x - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ Se $r = R$ (constante), $\dot{r} = 0$ e $\vec{v}(t) = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \omega R\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi =$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\vec{e}_r) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi}$$

Se $r = R$ (constante), $\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

radial tangencial

centrípeta angular Coriolis

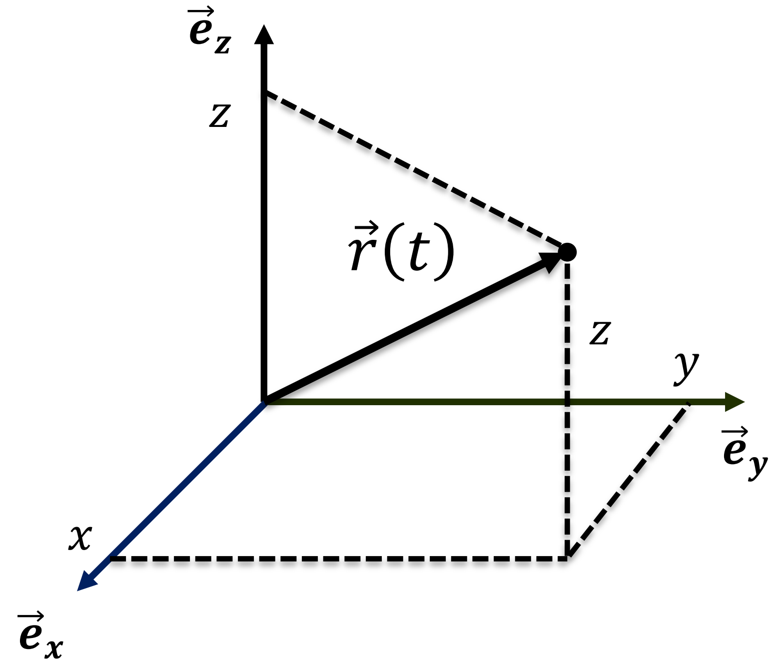
centrípeta angular

$\boxed{\text{3D}}$ Coordenadas Cartesianas

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z}$$



$$\vec{e}_z \equiv \vec{e}_x \times \vec{e}_y$$

Se alguma condição entre y (ou z ou ambos) e x (por ex.), então

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \frac{dy}{dx}\dot{x}\vec{e}_y + \frac{dz}{dx}\dot{x}\vec{e}_z}$$

(ambos, $y(t) = y\big(x(t)\big), z(t) = z(x(t))$)

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dz}{dx}\ddot{x}\right)\vec{e}_z}$$

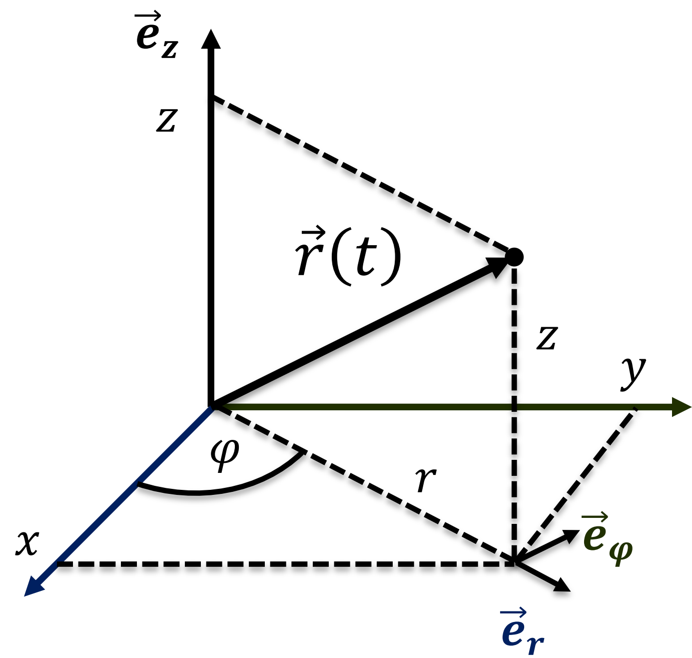
$\boxed{\text{3D}}$ Coordenadas Cilíndricas

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi \;(\mathrm{se}\ x < 0) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

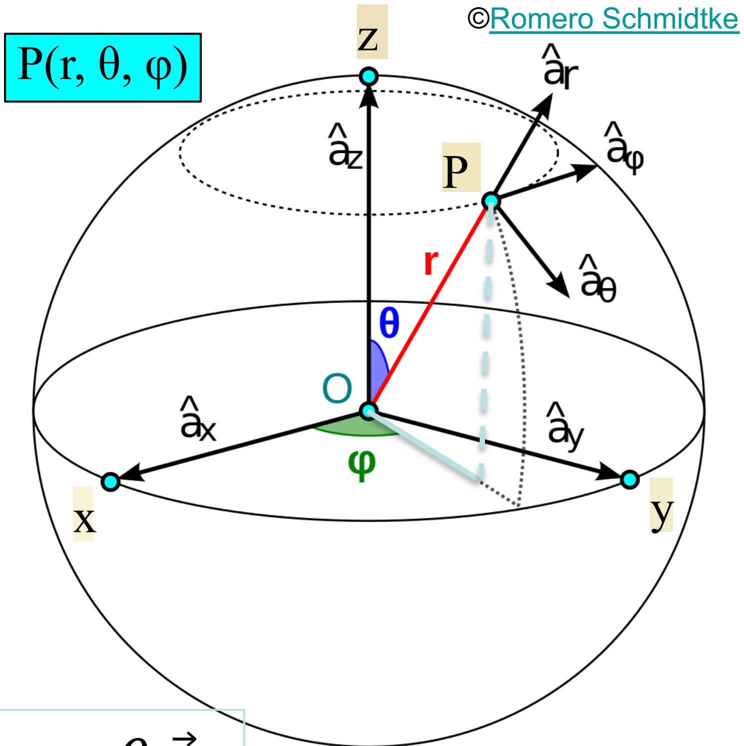


$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

3D Coordenadas Esféricas

$\hat{a}_? \equiv \vec{e}_?$



$$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r}$$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{r} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi \ (\text{se } x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r \equiv \dfrac{\vec{r}}{r} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_y - \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varphi} \qquad \boxed{\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

com $\begin{cases} \vec{e}_x = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta \end{cases}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

As 3 Leis de Newton

1. **Lei da Inércia**
   Um corpo em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme permanece no mesmo estado (repouso ou movimento) se e só se sobre ele não atuar uma ação (ou se resultante nula).

2. **Lei da Dinâmica**
   A aceleração de um corpo sobre o qual atua uma ação $\vec{F}$ (força total ou resultante) *é proporcional à ação e dada pela* ***equação do movimento****:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$$

3. **Lei da Ação–Reação**
   Se o sistema 2 exerce uma força F_{12} *sobre o sistema 1, então o sistema 1 exerce uma força* F_{21} ***sobre*** *o sistema 2 de igual direção e intensidade, mas de sentido oposto:*

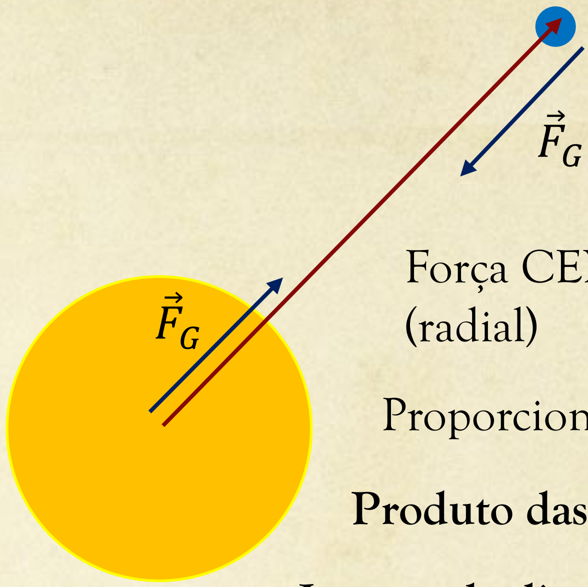
$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{21}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{12}}$$

A Lei da Gravitação Universal

(a outra Lei de Newton)

$$\vec{F}_G = -G_N \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

$$G_N = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$



Força CENTRAL (radial)

Proporcional:

Produto das massas

Inverso da distância²

O Princípio de Equivalência

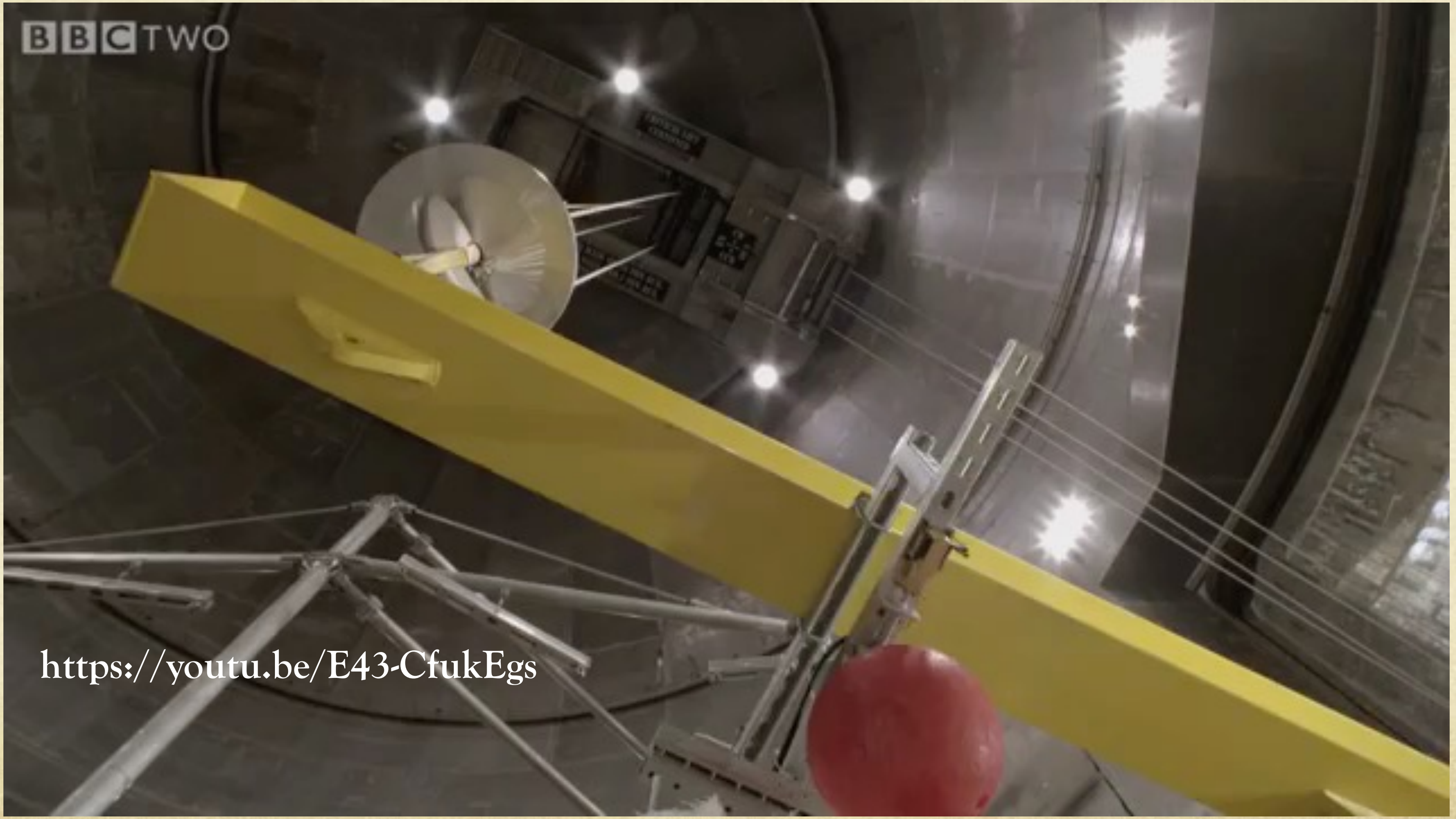
$$\vec{F}_G = -G_N \frac{m_G M_G}{r^2} \vec{e}_r \qquad \vec{F} = m_I \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_I} = \frac{m_G}{m_I}\left(-G_N \frac{M_G}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

$$m_G = m_I \equiv m$$

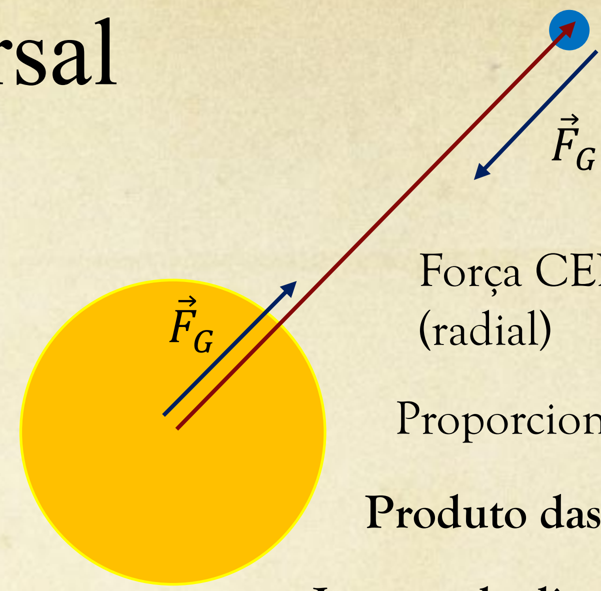
Hipótese de Galileu

Dois objetos de massas diferentes em queda livre têm a mesma lei do movimento e caem ao **mesmo tempo** (do Princípio de Equivalência)



A Lei da Gravitação Universal

$$\vec{F}_G = -G_N \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$



Força CENTRAL (radial)

Proporcional:

Produto das massas

Inverso da distância²

À superfície da Terra

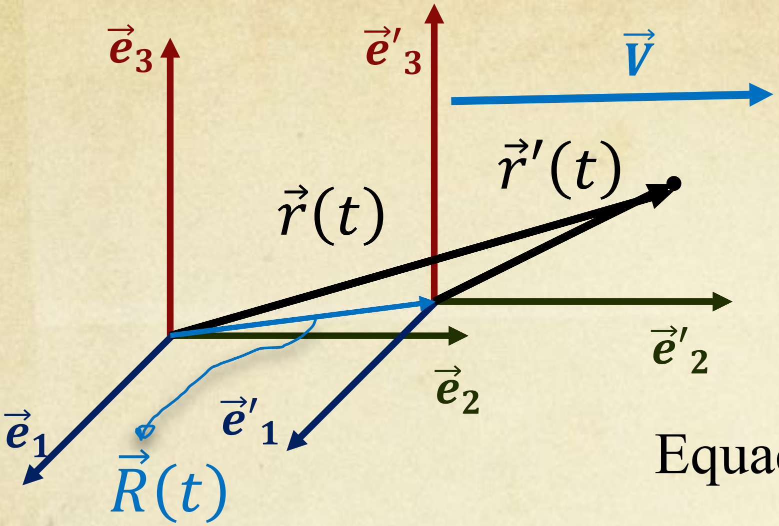
$r = R_T + h$ com altitude $h \lll R_T$ ($R_T = 6{,}376 \times 10^6 =$ Raio da Terra)

$$\vec{F}_G = -G_N \frac{mM_T}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r = -mG_N \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \vec{e}_r \cong -mG_N \frac{M_T}{R_T^2} \vec{e}_r = -mg\vec{e}_r$$

$$g = G_N M_T R_T^{-2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24} / (6{,}376 \times 10^6)^2 = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

$g(h) = g\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$ para $h \ll R_T$ $\quad g(h_{ISS}) \cong 8{,}57 \text{ m}/s^2$ (8,716)

Referenciais



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

Equação do movimento: $\vec{F} = m\vec{a}$ mas...

REFERENCIAIS DE INÉRCIA

$$\vec{V} = \text{constante}\ \vec{e}_{\text{mov}}$$

$$\sum_k \vec{F}_k = m\vec{a}$$

TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

$$\vec{a}' = \vec{a} \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$$

REFERENCIAIS ACELERADOS

$$\vec{V} \equiv \vec{V}(t) = V(t)\vec{e}_{\text{mov}}(t) \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(t)\right)$$

$$\sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{inercia}} = m\vec{a}$$

com $\vec{F}_{\text{inercia}} = -m\vec{a}_{\text{ref}}$

e $\vec{a}_{\text{ref}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(t)\right)$

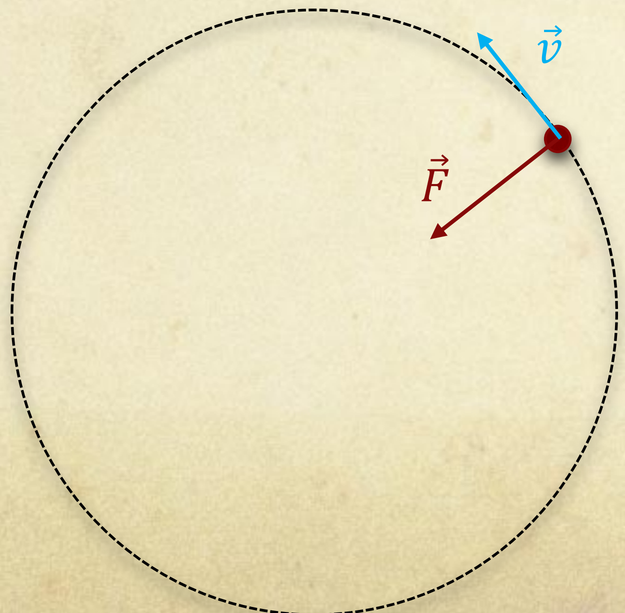
Exemplo: movimento circular uniforme

REFERENCIAL INERCIAL

Força Centrípeta é a Força aplicada:

$$\vec{F} = -m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = \vec{F}_{\text{aplicada}}$$

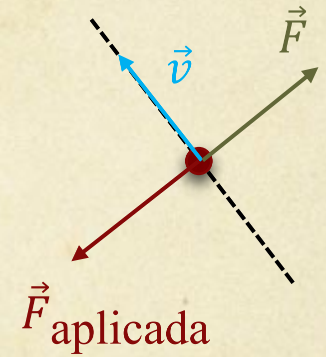
Aceleração Centrípeta: $\vec{a}_C = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$



REFERENCIAL ACELERADO

Há uma Força Centrífuga além de uma força aplicada:

$$\underbrace{\vec{F}\left(= m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r\right)}_{\vec{F}=-m\vec{a}_{REF}} + \vec{F}_{\text{aplicada}}$$



Se a força centrífuga for igual à força aplicada, o objeto está em equilíbrio nesse referencial acelerado (⇔ objeto em **órbita** terrestre se $v = \sqrt{G_N M_T / r}$)