6 Torção

O problema da torção tem sido estudado há algumas centenas de anos (Timoshenko 1934). Por uma questão de simplicidade o estudo da torção começa pelas secções cheias, circulares e não circulares, depois as secções finas (fechadas e abertas), incluindo as multicelulares (Figura 6-1). Considera-se em todos os casos que o material é isotrópico.

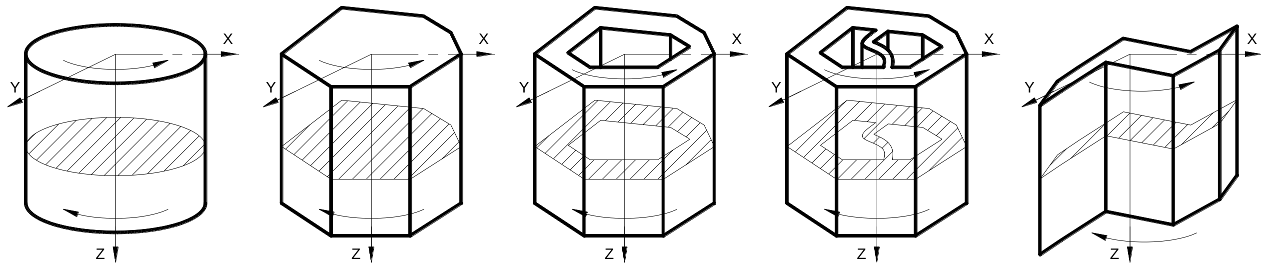


Figura 6-1 – Secções à torção.

Nomenclatura:

θ - Ângulo de rotação/unidade de comprimento

ϕ - Função de tensão de Prandtl

J - Constante de torção (*Torsional Constant*)

$\psi_{(x,y)}$ - Função de empeno (*warping*)

T, M_t - Momento torsor (*torque*)

G J - Rigidez à torção (*Torsional stiffness*)

6.1 Secção Circular

O problema da determinação das tensões num caso da torção de um veio de secção circular resulta num problema estaticamente indeterminado. Considerando a secção transversal no ponto C (Figura 6-2), o diagrama de corpo livre mostra que em cada ponto dessa secção existe uma força elementar dF a qual é perpendicular ao raio (r) em cada ponto (Figura 6-3), e que resulta de tensões de corte (τ) que atuam no plano da secção.

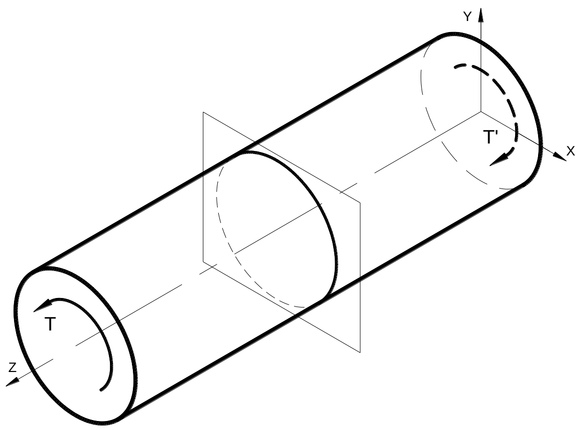


Figura 6-2 – Diagrama de corpo livre

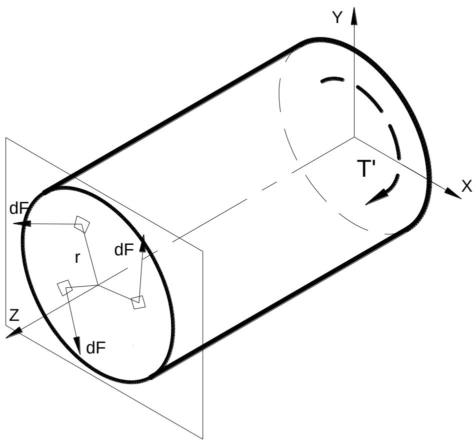


Figura 6-3 – Equilíbrio na secção

Assim, a equação de equilíbrio de momentos é:

$$T \equiv M_t = \int_{\text{Área}} r\, dF = \int_{\text{Área}} r(\tau\, dA) \tag{6.1}$$

Sendo o problema estaticamente indeterminado (como varia a tensão de corte na área?), é possível estabelecer o campo de tensões tomando em consideração a deformação associada.

As hipóteses básicas da deformação são simples de compreender uma vez que a geometria e o carregamento são axissimétricos. Considera-se que durante a deformação (Oden and Ripperger 1981):

- Secções transversais perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas;
- Essas secções não distorcem no seu próprio plano.

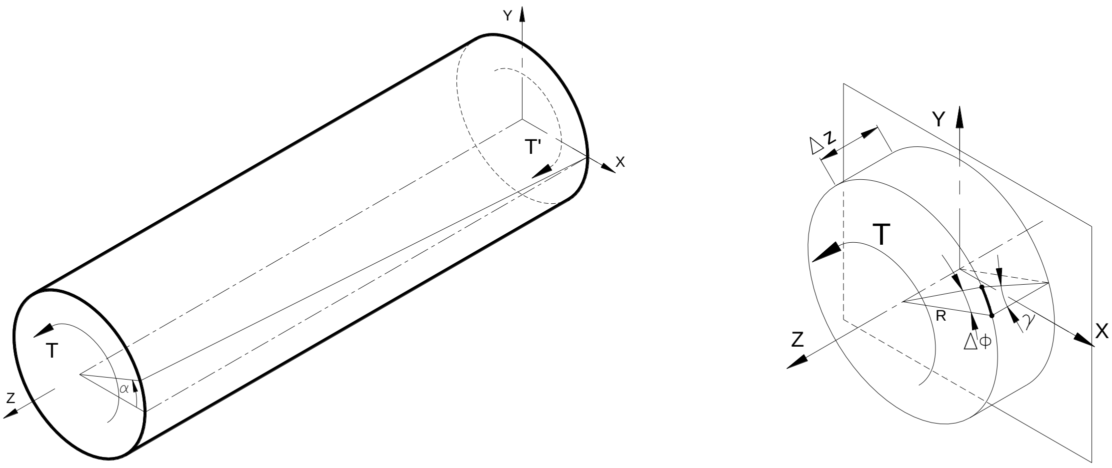


Figura 6-4 – Deformação da secção transversal num veio circular.

A rotação da secção transversal (Figura 6-4) será dada por:

$$\gamma_{z\alpha}\,\Delta z = r\,\Delta\phi \Leftrightarrow \gamma_{z\alpha} = r\frac{\Delta\phi}{\Delta z} \tag{6.2}$$

Em que $\gamma_{z\alpha}$ é a distorção no elemento Δz e $\Delta\phi$ o incremento de rotação da secção. Designado $\theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta z}$ o ângulo de torção por unidade de comprimento, e aplicando a relação constitutiva tensão de corte-distorção ($\tau_{z\alpha} = G\gamma_{z\alpha}$), tem-se:

$$\tau_{z\alpha} = G\gamma_{z\alpha} = Gr\theta \tag{6.3}$$

Substituindo na Eq. (6.1):

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{Area} r(\tau\, dA) = \int_{Area} r(Gr\theta\, dA) = G\theta \int_{Area} r^2\, dA = GJ\theta \\ M_t &= GJ\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta = \frac{M_t}{GJ} \end{aligned} \tag{6.4}$$

mm que G é o Módulo de Elasticidade Transversal, ou Módulo de corte (*Shear Modulus*) e J é a Constante de Torção (*Torsion constant*).

Note-se que no caso da secção circular J coincide com o momento polar de inércia:

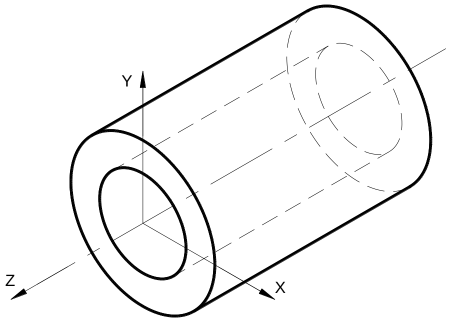
$$J = \int_{Area} r^2\, dA = \frac{\pi R^4}{2} \tag{6.5}$$

O termo G J designa-se por Rigidez à Torção (*Torsional stiffness*). As equações (6.6) e (6.7) são essenciais na torção de veios circulares:

$$\tau_{z\alpha} = \frac{M_t\, r}{J} \tag{6.6}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G\,J} \tag{6.7}$$

6.1.1 Exemplo 6.1 – Secção Circular



Considere o veio oco de aço (G=80GPa) com diâmetro exterior 40mm e espessura de parede 6mm, sujeito a um momento torsor de 600 N.m.

Calcule o ângulo de torção por unidade de comprimento.

Represente graficamente a tensão de corte na secção, e obtenha o valor máximo.

Resolução

a) Da expressão $\theta = \frac{M_t}{G\,J}$ precisamos apenas de calcular

$$J = \frac{\pi\left(R_{ext}^{\ 4} - R_{int}^{\ 4}\right)}{2} = \frac{\pi\left(20^4 - 14^4\right)}{2} = 190983\text{mm}^4 = 191\times10^{-9}\text{m}^4$$

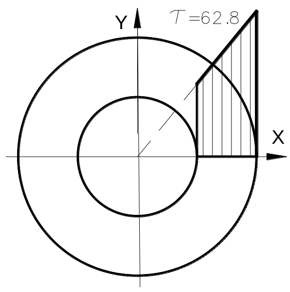
Para obter o resultado

$$\theta = \frac{M_t}{G\,J} = \frac{600}{80\times10^9\times191\times10^{-9}} = 0.03927\text{rad}/\text{m} = 2.25°/\text{m}$$

b) O valor máximo da tensão de corte é

$$\tau_{x\alpha_{\text{máx}}} = \frac{M_t\, r_{ext}}{J} = \frac{600\times20\times10^{-3}}{191\times10^{-9}} = 62.8\times10^6\,\text{Pa} = 62.8\text{MPa}$$

Note-se que a distribuição de tensões de corte é linear na espessura da parede do tubo.



6.2 Secções não-circulares

Para secções não-circulares deixa de existir a simetria axial, e consequentemente algumas das considerações anteriores deixam de ser válidas, particularmente a secção transversal deixa de ser plana, aparecendo o efeito de empeno da secção (*warping*), como no exemplo da Figura 6-5.

Para secções não circulares consideram-se as seguintes aproximações,(Ugural and Fenster 1995) :

- Rotação da Secção transversal, como num movimento de corpo rígido, deslocamentos u e v;
- Empeno da secção, idêntico para todas as secções ao longo do comprimento do veio, deslocamento w.

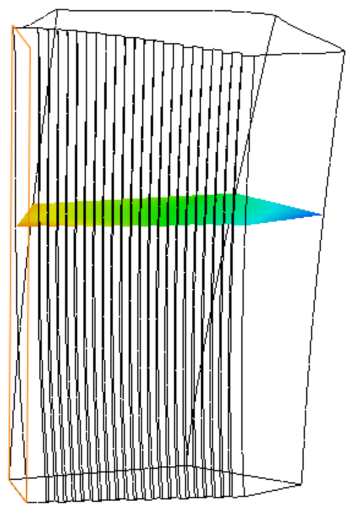


Figura 6-5 - Empeno de secções não circulares.

Assim, o campo de deslocamentos de um ponto P (Figura 6-6 e Figura 6-7) numa secção transversal à cota "z", é dado genericamente pela Eq. (6.8):

$$u = -\theta z y \qquad v = \theta z x \qquad w = \theta \psi_{(x,y)} \tag{6.8}$$

onde θ é o ângulo de torção por unidade de comprimento, $\beta = \theta z$ é o ângulo de rotação da secção. O deslocamento w (*warping*) é independente de "z". $\psi_{(x,y)}$ é a função de empeno. Admitindo pequenas deformações, as componentes do tensor das pequenas deformações, dado por (6.9), resulta na Eq. (6.10). Note-se que:

- Não há extensões normais ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$);
- Não há distorção no plano da secção ($\varepsilon_{xy} = 0$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right) \tag{6.9}$$

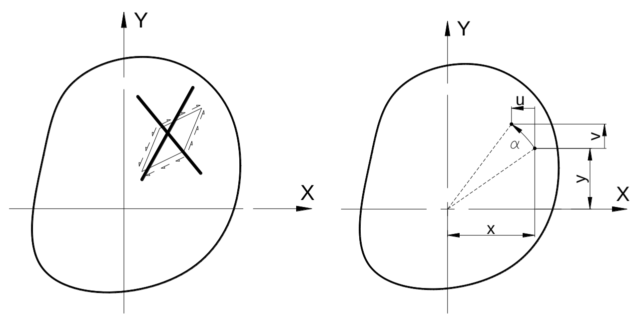


Figura 6-6 – Deformações na secção transversal

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \\ &2\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx} = \theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \\ &2\varepsilon_{zy} = \gamma_{zy} = \theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \\ & 0 & \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \\ & \text{sim.} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

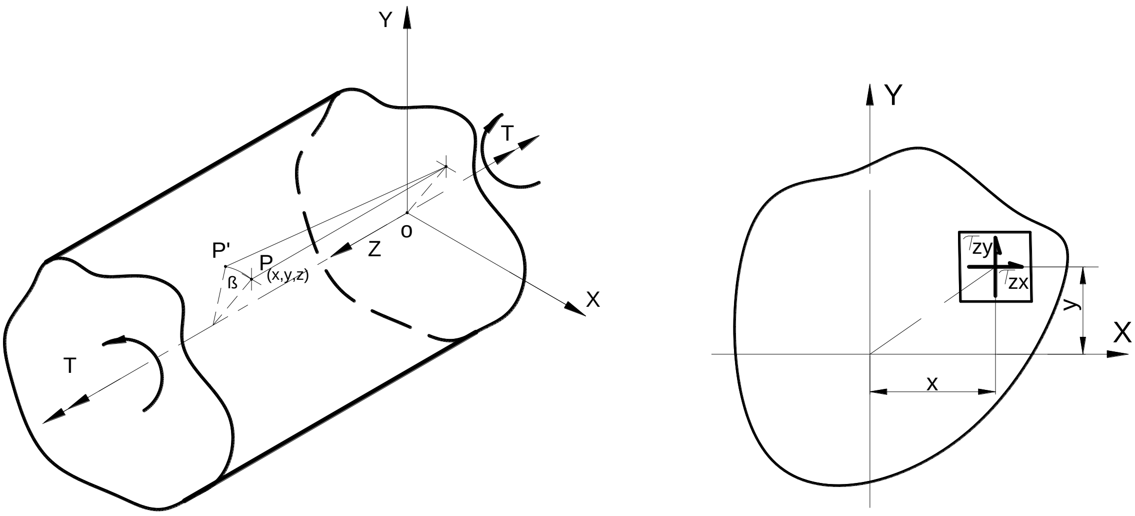


Figura 6-7 – Deslocamento e tensões de um ponto da secção transversal

Considerando materiais isotrópicos, aplicando a relação constitutiva, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{xy}=0\\
&\tau_{zx}=G\gamma_{zx}=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\right)\\
&\tau_{zy}=G\gamma_{zy}=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\right)
\end{aligned}
\qquad
\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0 & 0 & G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\right)\\ & 0 & G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\right)\\ & \text{sim.} & 0\end{bmatrix}
\tag{6.11}
$$

Substituindo nas equações de equilíbrio ($\sigma_{ji,j}+F_i=0$) e considerando nulas as forças volúmicas ($F_i=0$), permite obter as Eqs (6.12).

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0\\
\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\
\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0\\
\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\
\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0
\end{cases}
\tag{6.12}
$$

As duas primeiras mostram que as tensões de corte são independentes de “z”. Pegando nas Eqs. (6.11) e diferenciando τ_{zx} em ordem a “x” e τ_{zy} em ordem a “y” e colocando na terceira equação de (6.12), obtemos a Eq. (6.13) designada como Equação de Laplace.

$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0
\tag{6.13}
$$

Definindo a Função de Tensão de Prandtl (ϕ, Eq. (6.14)) como:

$$
\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}\qquad\qquad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}
\tag{6.14}
$$

obtemos a Eq. (6.15):

$$
\frac{\partial\phi}{\partial y}=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\right)\qquad\qquad -\frac{\partial\phi}{\partial x}=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+x\right)
\tag{6.15}
$$

Diferenciando a primeira em ordem a "y" e a segunda em ordem a "x", eliminando ψ obtemos a Eq. (6.16):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\theta \tag{6.16}$$

Uma equação do tipo da Eq. (6.16) designa-se por Equação de Poisson.

Desta forma o problema da torção passa a ser a determinação da Função de Tensão de Prandtl, ϕ, com as necessárias condições de fronteira. A dedução das condições de fronteira pode ser consultada em (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Timoshenko 1934), sendo aqui apresentadas no seu resultado final:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\tau_{xz}(m)-\tau_{yz}(-n)\equiv\frac{d\phi}{ds}=0 \tag{6.17}$$

O termo dØ/ds=0 significa que ϕ é constante ao longo da fronteira da secção. Os termos "m" e "n" são os cossenos diretores do vetor normal à curva em cada ponto.

No caso de domínios simplesmente conexos a constante pode ser qualquer (por exemplo nula), o que significa que o problema da torção consiste na determinação de ϕ que satisfaz as Eqs. (6.18) e (6.19):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\theta \tag{6.18}$$

$$\phi=0 \quad \text{na fronteira da secção} \tag{6.19}$$

Para que o equilíbrio se mantenha na secção têm de se verificar as Eqs. (6.20)-(6.22):

$$\sum F_x=0\Leftrightarrow\int\tau_{zx}\,dx\,dy=0\Leftrightarrow\int\frac{\partial\phi}{\partial y}dx\,dy=0 \tag{6.20}$$

$$\sum F_y=0\Leftrightarrow\int\tau_{zy}\,dx\,dy=0\Leftrightarrow-\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\,dy=0 \tag{6.21}$$

$$\sum M_z=T\Leftrightarrow\int\left(x\,\tau_{zy}-y\,\tau_{zx}\right)dx\,dy=T\Leftrightarrow-\int\left(x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy=T \tag{6.22}$$

Observando a Figura 6-8 (c) e considerando uma tira fina de espessura "dy", como a tensão não varia com "y", a Eq. (6.21) fica:

$$\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\,dy=\int dy\int\frac{d\phi}{dx}dx=\int dy\int_{\phi(A)}^{\phi(B)}d\phi=dy\left[\phi(B)-\phi(A)\right]=0 \tag{6.23}$$

uma vez que ϕ é nula na fronteira. De modo análogo se procede com a Eq. (6.20). A Eq. (6.22) é integrada por partes em cada um dos termos, entre A e B para tiras em "dy", e entre C e D para tiras em "dx":

$$\begin{aligned}T&=-\int\left(x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int\left(x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx\,dy-\int\left(y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy=\\&-dy\int\left(x\frac{d\phi}{dx}\right)dx-dx\int\left(y\frac{d\phi}{dy}\right)dy=-dy\int_{\phi(A)}^{\phi(B)}x\,d\phi-dx\int_{\phi(C)}^{\phi(D)}y\,d\phi=\\&-dy\left(x\left[\phi(B)-\phi(A)\right]-\int_{x_A}^{x_B}\phi dx\right)-dx\left(y\left[\phi(D)-\phi(C)\right]-\int_{y_C}^{y_D}\phi dy\right)=\quad dy\int_{x_A}^{x_B}\phi dx+dx\int_{y_C}^{y_D}\phi dy\end{aligned} \tag{6.24}$$

Somando (integrando) todas as tiras e notando que ambos os termos são idênticos, obtém-se a Eq. (6.25):

$$T = 2\iint \phi \, dx \, dy \tag{6.25}$$

Recuperando a Eq. (6.4), podemos escrever a expressão que nos dá a Constante de Torção (J):

$$T = GJ\theta \Leftrightarrow \qquad J = \frac{2}{G\theta}\iint \phi \, dx \, dy \tag{6.26}$$

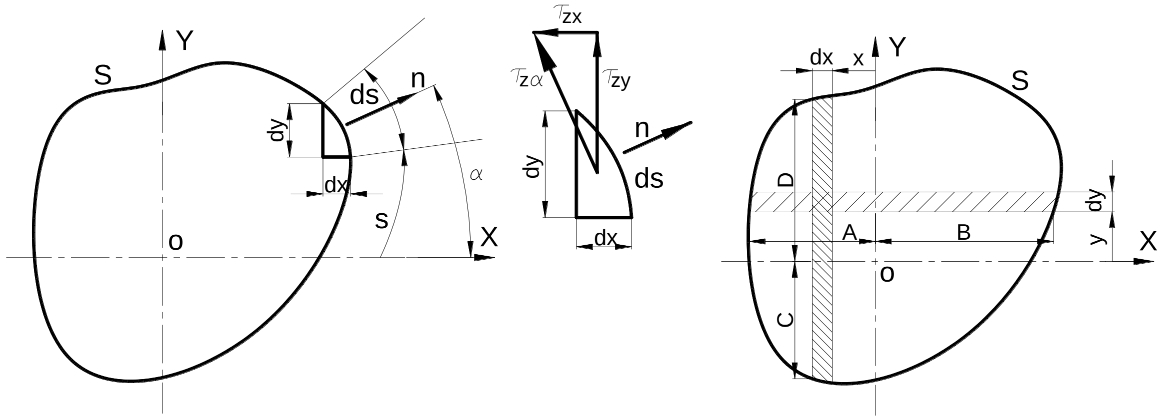


Figura 6-8 – Tensões de corte na secção.

Nas soluções dos problemas seguintes, irá determinar-se a função ϕ que satisfaz as Eqs. (6.18) e (6.19). Começa-se por encontrar a equação que traduz a curva da fronteira na forma $F(x,y)=0$ (a qual satisfaz imediatamente a condição de ser nula na fronteira) e sugerir uma função ϕ na forma $\phi = C \times F(x,y)$ em que C é uma constante a determinar resolvendo a Eq. (6.18).

6.2.1 Exemplo 6.2 - Secção Elítica

Considere a secção elítica da Figura 6-9. Determine as expressões para:

a) Função de Tensão de Prandtl
b) Constante de Torção, J
c) Tensões de corte na secção
d) Deslocamentos u, v e w na secção transversal
e) Apresente de forma gráfica o empeno da secção

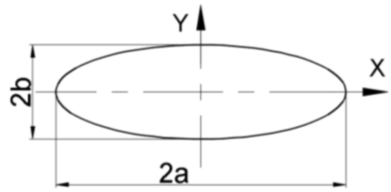


Figura 6-9 - Secção Elítica

<u>Resolução</u>:

a) Começa-se por escrever a equação que define a fronteira de uma secção elítica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

A Eq. (6.18) pode ser satisfeita considerando como função de Tensão de Prandtl a expressão:

$\phi = C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ em que C é uma constante. Substituindo na Eq. (6.18) e resolvendo em ordem a C,

obtemos $$C = -\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)}G\theta$$

e finalmente
$$\phi=-\frac{a^2b^2\,G\theta}{\left(a^2+b^2\right)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

b) Substituindo em (6.25) e fazendo as integrações, obtemos:

$$M_t=-\frac{a^2b^2G\theta}{\left(a^2+b^2\right)}\int_{-a}^{+a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)dydx=\frac{\pi a^3b^3\,G\theta}{\left(a^2+b^2\right)}$$

onde $J=\frac{2}{G\theta}\iint\phi\,dx\,dy=\frac{\pi a^3b^3}{\left(a^2+b^2\right)}$ invertendo: $G\theta=\frac{\left(a^2+b^2\right)}{\pi a^3b^3}M_t$

E finalmente podemos também escrever a Função de Tensão de Prandtl em função do momento torsor aplicado.

$$\phi=\frac{M_t}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

c) As componentes da tensão são calculadas diretamente das expressões da definição:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{2M_t\,y}{\pi ab^3}\qquad\qquad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{2M_t\,x}{\pi a^3b}$$

O ângulo de torção por unidade de comprimento é dado por: $\theta=\frac{a^2+b^2}{\pi a^3b^3\,G}M_t$

Caso b<a, a tensão de corte máxima ocorre nos pontos da fronteira mais próximos do centróide $\left(x=0,\ y=\pm b\right)$ $\tau_{max}=\frac{2M_t}{\pi ab^2}$

d) Os deslocamentos podem ser obtidos por integração, apresentando-se aqui o resultado final:

$$u=-\theta zy=-\frac{a^2+b^2}{\pi a^3b^3\,G}M_t\,zy\qquad\qquad v=\theta zx=\frac{a^2+b^2}{\pi a^3b^3\,G}M_t\,zx$$

$$w=\theta\psi_{(x,y)}=\frac{b^2-a^2}{\pi a^3b^3\,G}M_t\,xy$$

e) Graficamente, o empeno (w, nas expressões anteriores) pode ser representado por isolinhas (hipérboles x·y = constante, Figura 6-10)

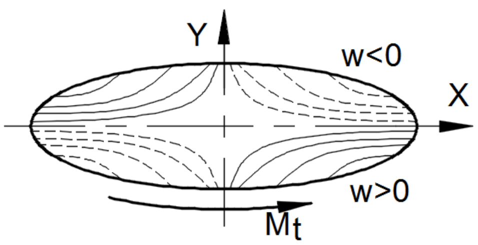


Figura 6-10 - Isolinhas do empeno

Na Figura 6-11 pode-se ver o resultado da simulação numérica (com elementos finitos usando SolidWorks Simulation), da torção de uma secção elítica. Pode-se também observar as isolinhas do deslocamento axial, empeno.

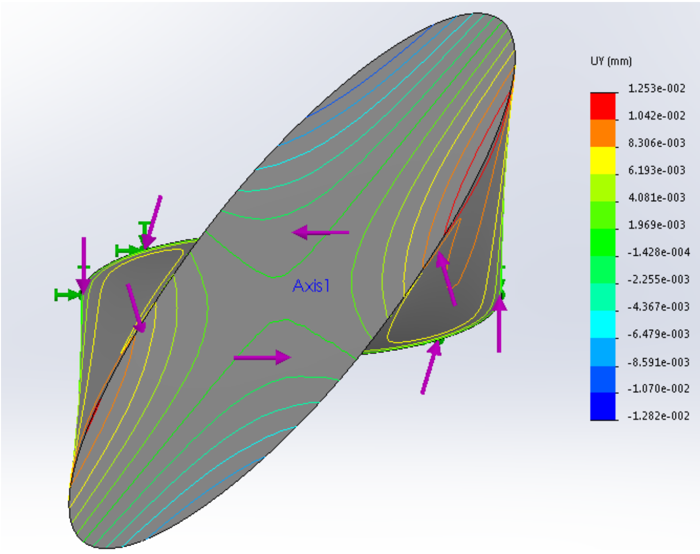


Figura 6-11- Secção Elítica: simulação numérica

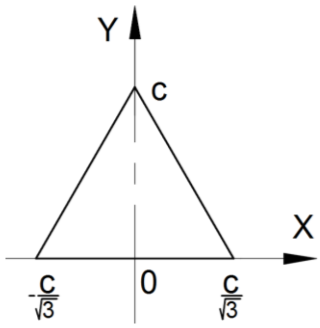
6.2.2 Exemplo 6.3 - Secção Triangular

Considere a secção triangular equilátera à torção.

a) Obtenha a função de tensão deste problema

b) Calcular as tensões de corte. Represente τ_{xz} na linha x=0.

c) O empeno é dado por $w = -\frac{1}{2}\frac{\theta}{c}\left(x^3 - 3xy^2 + 2cxy + c^2x\right)$. Represente as linhas de contorno desta função.



Resolução

a) Os lados do triângulo são dados pelas equações das linhas $y=0; y=\pm\sqrt{3}x+c$, pelo que a função de tensão pode ser dada por:

$$\phi = Ay\left(y-c-\sqrt{3}x\right)\left(y-c+\sqrt{3}x\right) \qquad \text{onde A=constante}$$

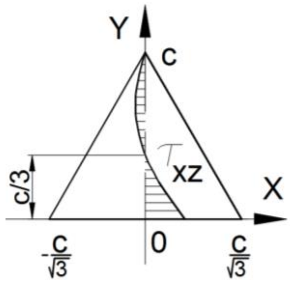
Substituindo a função ϕ na equação $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\theta$ obtemos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-6Ay+2A\left(y-c+\sqrt{3}x\right)+2A\left(y-c-\sqrt{3}x\right)+2Ay=-4Ac \Leftrightarrow -4Ac=-2G\theta \Leftrightarrow A=\frac{G\theta}{2c}$$

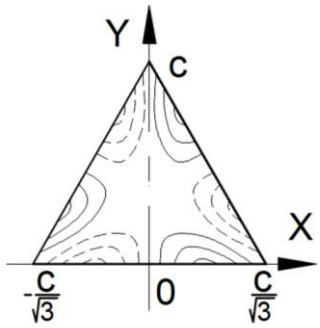
b) as tensões são dadas por:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{G\theta}{c}\left(3y^2-3x^2-4cy+c^2\right) \qquad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{3G\theta}{c}xy$$

Note-se que as tensões são nulas nos vértices e no centróide (0,c/3), e são máximas a meio de cada um dos lados, ou seja nos pontos da fronteira mais próximos do centróide.



c) Sendo o empeno $w=-\frac{1}{2}\frac{\theta}{c}\left(x^3-3xy^2+2cxy+c^2x\right)$, a representação é a da figura junta.



6.2.3 Exemplo 6.4 - Veio Circular com escatel (problema de teste, ver secção 9.6, página 199)

A função de tensão de Prandtl para a secção circular com escatel (*keyway*), Figura 6-12, é dada por:

$$\phi=-C\left(x^2+y^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{x^2+y^2}\right)$$

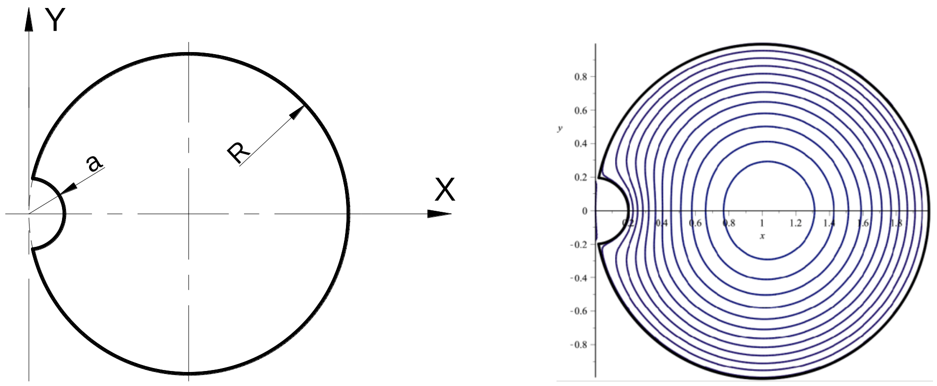


Figura 6-12 - Veio circular com escatel

a) Mostre que Ø é uma função de tensão e calcule a constante C

b) Calcule as tensões de corte na secção

c) A Figura 6-12 (b) representa isolinhas da função de tensão com a/R=0.2. Indique o ponto onde a tensão de corte é mais elevada. Justifique com a figura.

d) Obtenha a máxima tensão de corte com a/R=0.2.

e) Calcule o fator de concentração de tensões, comparando com uma secção circular de raio R.

<u>Resolução</u>

a) A função de tensão deve satisfazer: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\theta$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-C\left(2x-2R+2Ra^2\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=-C\left(2x-2R-2Ra^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-C\left(2+\frac{4Ra^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+2Ra^2\frac{\left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\right)=-C\left(2-\frac{4Ra^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{8Ra^2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-C\left(2y-4Ra^2\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-C\left(2-4Ra^2\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+4Ra^2\frac{2xy\left(x^2+y^2\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\right)=-C\left(2-\frac{4Ra^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{16Ra^2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)$$

fazendo $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\ldots=-4C=-2G\theta \quad \Leftrightarrow \quad C=\frac{G\theta}{2}$

Na fronteira teremos $\phi=\text{constante}$

Na circunferência maior: $\left(x-R\right)^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2Rx$

Substituindo em $\phi=-C\left(x^2+y^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{x^2+y^2}\right)$ obtemos

$$-C\left(x^2+y^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{x^2+y^2}\right)=-C\left(2Rx-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{2Rx}\right)=0$$

Na circunferência menor: $x^2+y^2=a^2$

Substituindo em $\phi=-C\left(x^2+y^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{x^2+y^2}\right)$ obtemos

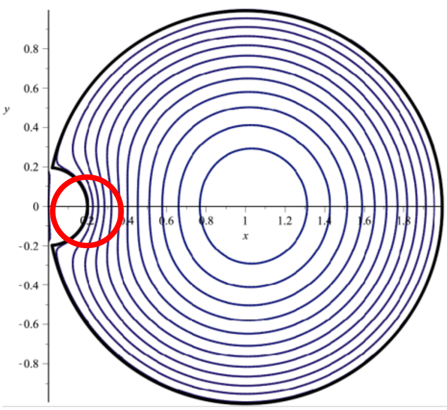
$$-C\left(x^2+y^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{x^2+y^2}\right)=-C\left(a^2-a^2-2Rx+\frac{2Ra^2x}{a^2}\right)=0$$

Concluindo-se portanto que a função dada cumpre os requisitos.

b) As tensões são dadas por:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=C\left(2y-\frac{4Ra^2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=-G\theta y\left(1-\frac{2Ra^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=C\left(2x-2R-2Ra^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=G\theta\left(x-R-Ra^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$



c) A tensão de corte máxima ocorre no ponto (a,0). Tal deve-se ao facto de a tensão de corte ser tangente (é a derivada) às curvas de nível e na direção perpendicular a essas curvas, portanto a máxima tensão de corte ocorre onde as curvas estão mais próximas umas das outras.

d) as tensões no ponto (a,0) são:

$$\tau_{xz_{(a,0)}} = -G\theta y\left(1-\frac{2Ra^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)_{(a,0)} = 0$$

$$\tau_{yz_{(a,0)}} = G\theta\left(x-R-Ra^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)_{(a,0)} = G\theta\left(a-R-Ra^2\frac{a^2}{\left(a^2\right)^2}\right) = G\theta\left(a-2R\right)$$

para a/R=0.2, obtemos

$$\tau_{yz_{(a,0)}} = G\theta\left(a-2R\right) = G\theta R\left(\frac{a}{R}-2\right) = G\theta R\left(0.2-2\right) = -1.8G\theta R$$

e) Para uma secção circular, a máxima tensão de corte (ver Eq. (6.6)) é dada pela expressão:

$$\tau_{circular_{max}} = \frac{TR}{J} = \frac{JG\theta\, R}{J} = G\theta R$$

Assim o fator de concentração de tensões é (aqui o sinal negativo é irrelevante) $k = \frac{\tau_{yz_{(a,0)}}}{\tau_{circular_{max}}} = \frac{1.8G\theta R}{G\theta R} = 1.8$

6.2.4 Exemplo 6.5 - Problema Proposto

Verificar que $\phi = C\left(x^2+y^2-a^2\right)$ satisfaz $\theta = \frac{M_t}{GI_p}$ e $\tau_{zx_{max}} = \frac{M_t a}{I_p}$ onde I_p é o momento polar de inércia da secção transversal, e "a" é o raio do círculo.

<u>Resolução</u>

A equação tem de satisfazer $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta$ $\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 4C = -2G\theta \iff C = -\frac{G\theta}{2}$

assim $\quad \phi = -\frac{G\theta}{2}\left(x^2+y^2-a^2\right)$

$$M_t = 2\iint \phi\, dx\, dy = 2\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} -\frac{G\theta}{2}\left(x^2+y^2-a^2\right)dydx = -G\theta\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\left(x^2+y^2-a^2\right)dydx$$

$$M_t = \frac{1}{2}\pi a^4\, G\theta \equiv JG\theta$$

onde $\quad J = \frac{1}{2}\pi a^4 \equiv I_p \quad$ e assim $\quad \theta = \frac{M_t}{GI_p}$

e portanto $\quad \phi = -\frac{G\theta}{2}\left(x^2+y^2-a^2\right) = -\frac{M_t}{2I_p}\left(x^2+y^2-a^2\right)$

As tensões são calculadas por $\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{M_t}{I_p} y$ e o valor máximo é $\tau_{zx_{max}} = \frac{M_t a}{I_p}$

6.3 Secção Retangular Fina

Embora os perfis retangulares sejam usados sobretudo em tração/compressão uniaxial e em flexão, é também comum que tenham de suportar esforços de torção. Frequentemente estes perfis têm parede fina o que justifica o seu estudo. Os detalhes desta matéria podem ser vistos nas referências já mencionadas.

Considere-se a secção retangular 2c x 2b, em que c<<b (Figura 6-13). Usando a analogia da membrana (ver (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Ugural and Fenster 1995)), a Função de Tensão de Prandtl sugerida tem a forma da Eq. (6.27). Esta função é aproximada, respeita a condição de fronteira ($\phi = 0$) em y=±c mas não respeita a condição de fronteira em x=±b.

$$\phi = G\theta c^2 \left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \tag{6.27}$$

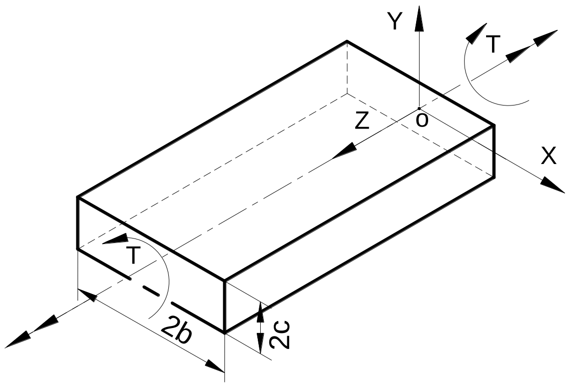


Figura 6-13 - Secção retangular fina à torção.

Pelo que as tensões são:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2G\theta y \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \tag{6.28}$$

O momento torsor é:

$$T = 2\iint \phi \, dx\, dy = 2\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} G\theta c^2 \left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] dxdy = \frac{1}{3} G\theta (2b)(2c)^3 \tag{6.29}$$

Como $T = JG\theta$, obtém-se

$$J = \frac{1}{3}(2b)(2c)^3 \tag{6.30}$$

Ou ainda:

$$\theta = \frac{3T}{G(2b)(2c)^3} \tag{6.31}$$

A tensão de corte máxima, obtida em y=±c :

$$\tau_{máx} = \frac{3T}{(2b)(2c)^2} = \frac{2Tc}{J} \tag{6.32}$$

6.4 Secção Retangular

O caso da secção retangular é aproximado a partir de um desenvolvimento em série. Também aqui os detalhes devem ser consultados em (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Timoshenko 1934). De forma resumida, para uma secção retangular 2b x 2c (Figura 6-14), as expressões são semelhantes ao caso anterior.

$$\theta = \frac{T}{k_1 G (2b)(2c)^3} \tag{6.33}$$

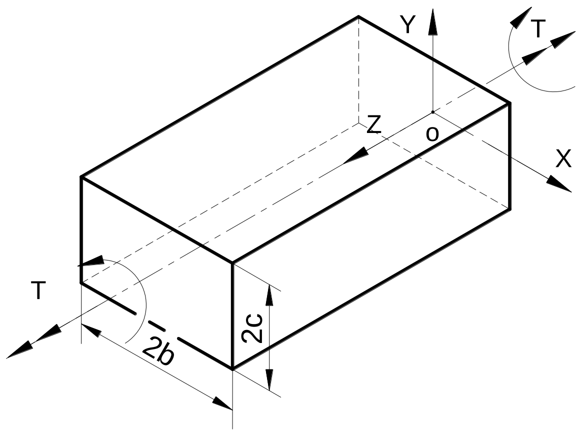


Figura 6-14 - Secção retangular à torção

A tensão de corte máxima, obtida em y=±c :

$$\tau_{máx} = \frac{T}{K_2 (2b)(2c)^2} \tag{6.34}$$

A constante de torção: $$J = K_1 (2b)(2c)^3 \tag{6.35}$$

Os valores dos parâmetros K_1 e K_2 são retirados da Tabela 6.1(Boresi, Schmidt et al. 1993).

Tabela 6.1 - Parâmetros de torção para secções retangulares

b/c	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**4**	**6**	**10**	**∞**
K_1	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.312	0.333
K_2	0.208	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.312	0.333

6.4.1 Exemplo 6.6 - Secção Retangular

Considere a Figura 6-15. A viga é feita de um Aço (G=77.5 GPa) e está sujeita a dois momentos torsores, T1=750 N.m e T2=400N.m. Considere que o suporte impede a rotação da secção transversal mas não evita o empeno. Determine a máxima tensão de corte e o ângulo de torção na extremidade livre.

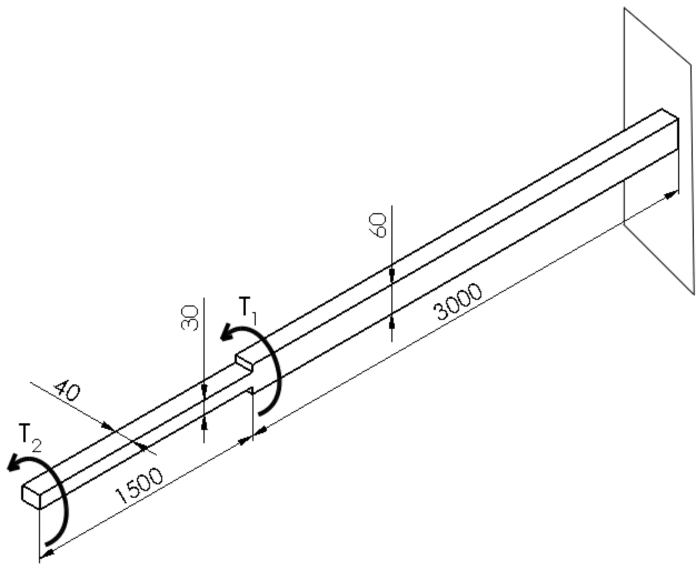


Figura 6-15- Viga retangular à torção

Resolução

Para a secção 60 x 40, temos $\frac{b}{c}=\frac{30}{20}=1.5$. Da Tabela 6.1 retiramos k_1=0.196 e k_2=0.231. Esta secção (Figura 6-16) está sujeita ao momento total $T=T_1+T_2=1150\text{N.m}$. A tensão de corte máxima será:

$$\tau_{máx}=\frac{T}{K_2(2b)(2c)^2}=\frac{1150}{0.231(60)(40)^2\times10^{-9}}=51.9\text{MPa}$$

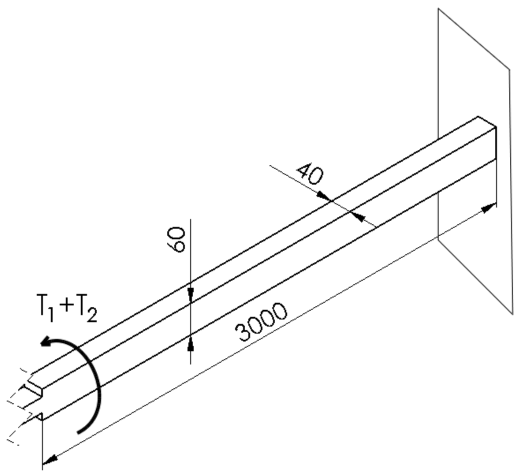


Figura 6-16 - Troço 60 x 40 mm

Para a secção 40 x 30 (Figura 6-17), temos $\frac{b}{c}=\frac{20}{15}=1.33$. Da Tabela 6.1 retiramos, por interpolação linear, k_1=0.178 e k_2=0.223. Esta secção está sujeita ao momento total T_2=400 N.m.

A tensão de corte máxima será:

$$\tau_{máx}=\frac{T_2}{K_2(2b)(2c)^2}=\frac{400}{0.223(40)(30)^2\times10^{-9}}=49.8\text{MPa}$$

O ângulo de torção total será a soma do ângulo de torção de cada um dos troços:

$$\alpha=\sum_{i}\frac{T_iLi}{G_iJ_i}=\frac{1150\times 3}{0.196\left(77.5\times 10^{9}\right)(60)(40)^{3}\times 10^{-12}}+\frac{400\times 1.5}{0.178\left(77.5\times 10^{9}\right)(40)(30)^{3}\times 10^{-12}}=0.0994\text{rad}$$

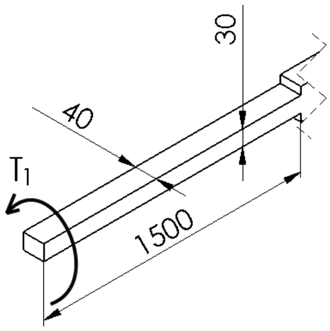


Figura 6-17 - Troço 40 x 30mm.

6.5 Secção Fina Composta de Vários Segmentos

No caso de a secção transversal ser composta de vários segmentos (Figura 6-18), a constante de torção pode ser obtida pela expressão:

$$J=C\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(2b_i)(2c_i)^3=C\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(l_i)(t_i)^3 \tag{6.36}$$

Onde C é um coeficiente de correlação. Se b_i>10c_i para <u>todos</u> os segmentos da secção considera-se $C\approx 1$, caso contrário recomenda-se C=0.91. Na expressão (6.36) tem-se $b_i=l_i/2$ e $c_i=t_i/2$ como na Figura 6-18.

A tensão de corte máxima é dada a partir da Eq. (6.32) por:

$$\tau_{máx}=\frac{Tt_{máx}}{J} \tag{6.37}$$

Em que $t_{máx}$ é a espessura máxima na secção.

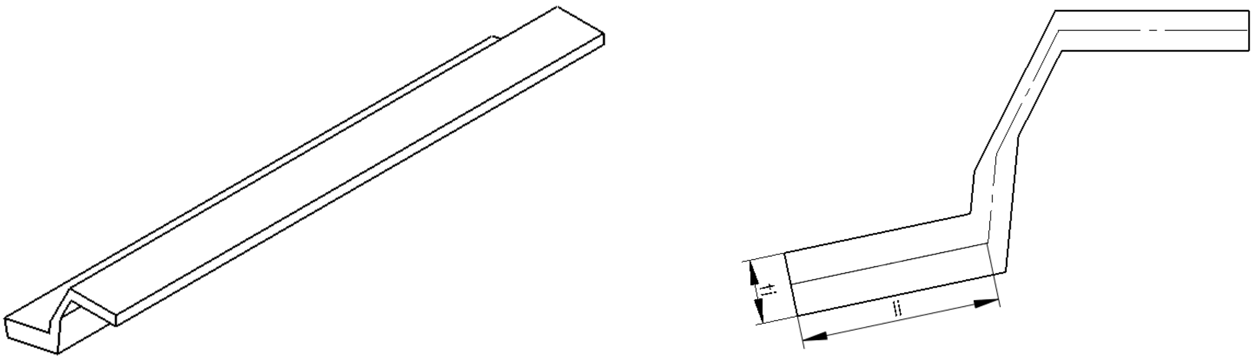


Figura 6-18 - Secção fina composta

6.5.1 Exemplo 6.7 - Secção em “C”

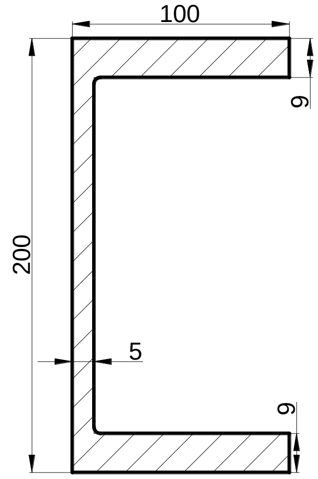


Figura 6-19 - Secção em "C"

Calcular a tensão de corte máxima e o ângulo de torção da viga junta (Figura 6-19), feita de um Aço com G=77.5GPa. O momento torsor aplicado é de 600N.m.

Resolução

Para este problema temos: $J = C\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} l_i\ t_i^3 = \frac{1}{3}\left[2\times(100-2.5)(9)^3 + (200-9)(5)^3\right] = 55300\text{mm}^4$

onde C é o coeficiente de correlação. Neste caso $C \approx 1$ pois $l_i > 10t_i$

$$\tau_{max} = \frac{T\ t_{max}}{J} = \frac{600\times 9}{55300} = 97.6\text{MPa} \qquad \theta = \frac{T}{GJ} = \frac{600}{\left(77.5\times\times 10^9\right)\times\left(55300\times 10^{-12}\right)} = 0.14\text{rad/m}$$

6.5.2 Exemplo 6.8 - Secção em “Z”

A secção da

Figura 6-20 é extrudida numa liga de Alumínio. Qual o binário máximo que é possível aplicar sabendo que τ_{max} =75MPa.

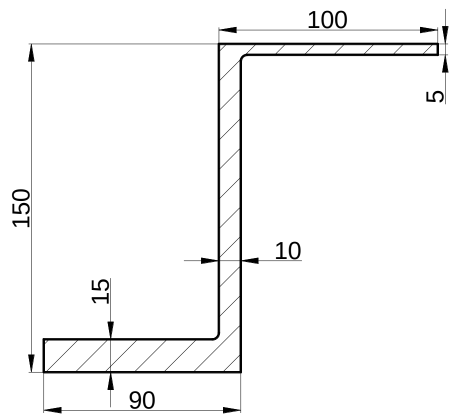


Figura 6-20 - secção em "z"

Resolução

Usando as expressões anteriores, temos:

$$J = C\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} l_i\ t_i^3 = 0.91\frac{1}{3}\left[(100-5)(5)^3 + (150-7.5-2.5)(10)^3 + (90-5)(15)^3\right] = 133100\text{mm}^4$$

Note-se que para o segmento inferior se tem $\frac{l}{t} = \frac{90-5}{15} = 5.7 < 10$ e portanto C=0.91

$$T = \frac{J\ \tau_{max}}{t_{max}} = \frac{133100\times 10^{-12}\times 75\times 10^9}{15\times 10^{-3}} = 665.4\text{N.m}$$

6.6 Torção de perfis finos fechados

As secções finas fechadas constituem aquilo que vulgarmente se designa por um tubo.

De uma forma simplificada, a torção de perfis finos fechados pode ser estudada a partir do equilíbrio de forças provenientes das tensões de corte existentes na parede do tubo. Considere-se o tubo ao qual é aplicado um momento torsor T, Figura 6-21.

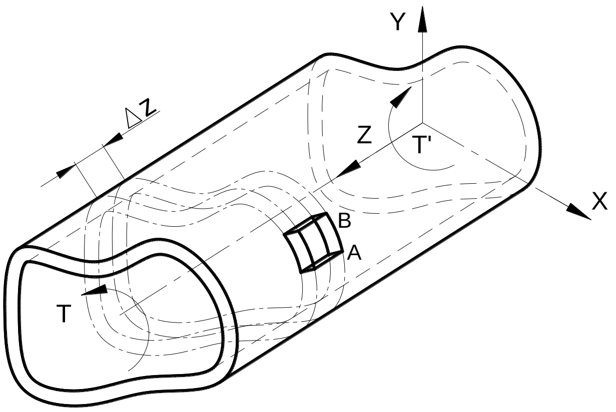


Figura 6-21 - Perfil fechado oco à torção.

Isolando um pedaço da parede desse tubo (Figura 6-22) a uma distância Δz, a soma das forças na direção longitudinal terá de ser nula, Eq. (6.38).

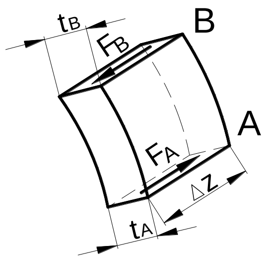


Figura 6-22 - Equilíbrio de forças numa parede elementar.

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow F_A - F_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_A t_A \Delta z = \tau_B t_B \Delta z \Leftrightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B \tag{6.38}$$

Definindo a grandeza fluxo de corte (*shear flow*) como $q = \tau t$, a Eq. (6.38) traduz que na parede do tubo se tem o fluxo de corte constante, Figura 6-23.

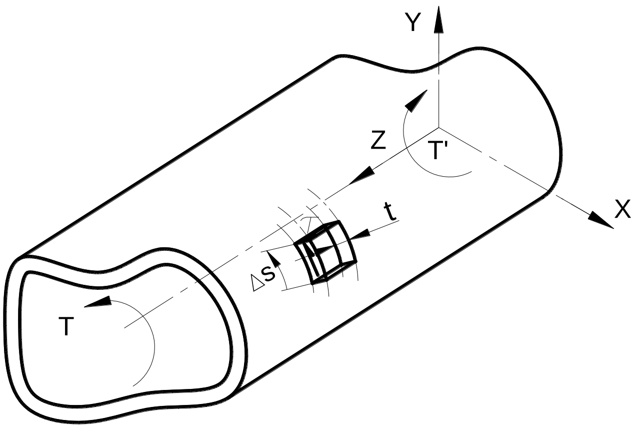


Figura 6-23 - Fluxo de corte.

Como não existem forças a atuar nas superfícies superior e inferior do elemento (parede interna e externa do tubo), significa que a tensão de corte é paralela à superfície da parede.

O momento dM_o criado em torno do ponto O é:

$$dM_0 = p\,dF = p\,\tau\,dA = p(\tau t)ds = p\,q\,ds \quad (6.39)$$

Como a área $p\,ds = 2d\Omega$, o momento torsor pode ser expresso como (Figura 6-24)

$$T = \oint dM_0 = \oint q(2d\Omega) = 2q\Omega \quad (6.40)$$

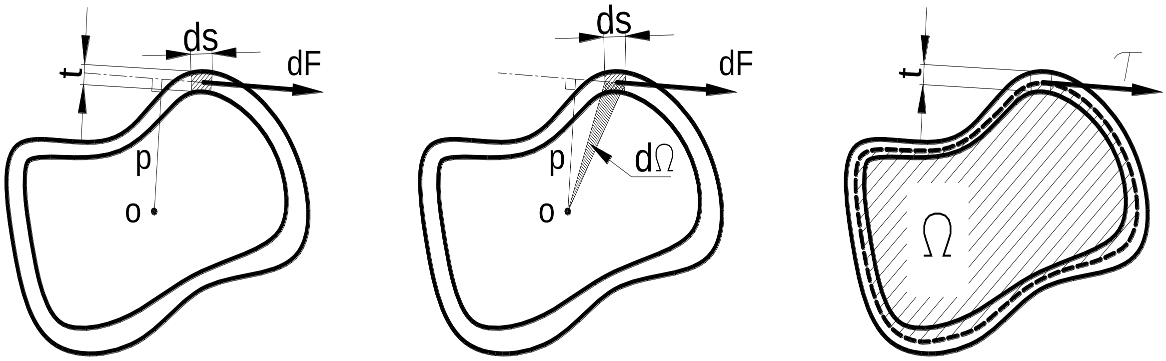


Figura 6-24 - Momento torsor em perfis finos fechados.

A expressão para o ângulo de torção /unidade de comprimento pode ser obtida por métodos energéticos, fora do âmbito deste texto, o seu resultado são as expressões (6.41) e (6.42).

$$\theta = \frac{T}{JG} = \frac{T}{G}\left(\frac{1}{4\Omega^2}\oint_s \frac{ds}{t}\right) \quad (6.41)$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}} \quad (6.42)$$

Nestas secções é frequente haverem diversos troços em que a espessura é constante, nesse caso o integral da Eq. (6.42) é calculado como um somatório:

$$\oint_s \frac{ds}{t} = \frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2} + \ldots \quad (6.43)$$

6.6.1 Exemplo 6.9 – Problema torção perfil fechado fino

A secção simétrica fechada da Figura 6-25 está sujeita a um binário de 20 N.m. Supondo que o material tem G=80GPa, calcular a tensão de corte máxima e o ângulo de torção por unidade de comprimento.

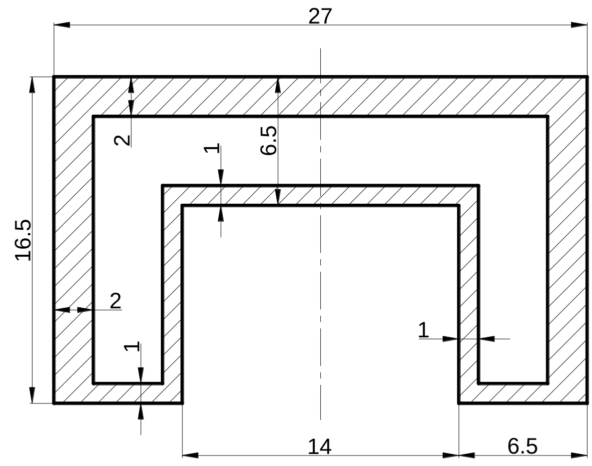


Figura 6-25 – Figura do Exemplo 6.9

<u>Resolução</u>

Sabendo que $T = \oint dM_0 = \oint q(2d\Omega) = 2q\Omega = 2\tau t\Omega$ obtemos $\tau = \dfrac{T}{2t\Omega}$

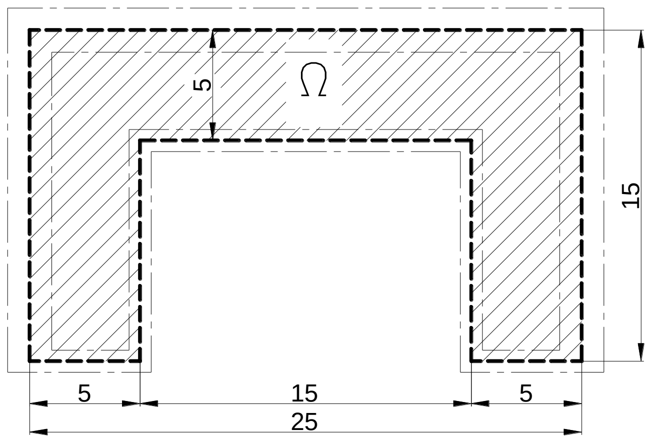


Figura 6-26 – Cálculo da área fechada.

Em primeiro lugar calcula-se a área delimitada pela linha média (a ponteado na Figura 6-26) de cada troço da secção (Ω):

$$\Omega = 5\times15 + 5\times15 + 5\times15 = 225\text{mm}^2$$

A máxima tensão de corte ocorre onde a espessura é mínima (t_{min}=1mm):

$$\tau_{max} = \frac{T}{2t\Omega} = \frac{20}{2\times1\times10^{-3}\times225\times10^{-6}} = 44.4\text{MPa}$$

A secção é constituída por 3 segmentos com t=2mm, e por 5 segmentos com t=1mm. Para calcular o ângulo de torção por unidade de comprimento usa-se a expressão:

$$\theta = \frac{T}{JG} = \frac{T}{G}\left(\frac{1}{4\Omega^2}\oint_s \frac{ds}{t}\right) \qquad \text{onde} \qquad J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}}$$

Neste caso o integral pode ser calculado como

$$\oint_s \frac{ds}{t} = \frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2} + \ldots = \frac{15+25+15}{2} + \frac{5+10+15+10+5}{1} = 72.5$$

Obtendo-se a constante de torção $J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}} = \frac{4\times 225^2}{72.5} = 2973\text{mm}^4$

E finalmente $\theta = \frac{T}{JG} = \frac{20}{2973\times 10^{-12}\times 80\times 10^9} = 0.084 \text{ rad/m}$

6.7 Torção de Perfis Finos Multicelulares

Certos perfis usados em Engenharia são fechados e compostos por várias células, sendo por isso designados perfis finos multicelulares (Figura 6-27). Ao contrário dos perfis finos unicelulares, em que o problema era isostático sendo possível determinar o fluxo de corte ao longo da parede do perfil, no caso das secções multicelulares tal não acontece. É assim necessário encontrar o conjunto de equações de compatibilidade de deformação que permita resolver o problema.

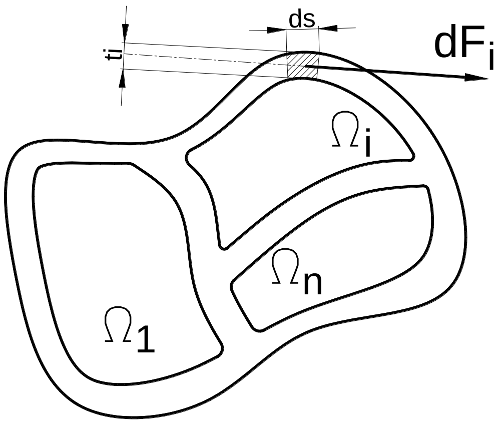


Figura 6-27 - Perfil fino multicelular.

Começa-se por reescrever a Eq. (6.40):

$$T = 2\sum_{i=1}^{n} q_i\Omega_i \tag{6.44}$$

E a Eq. (6.41) para a célula i:

$$\theta_i = \frac{q_i}{2G\Omega_i}\oint_{S_i}\frac{ds_i}{t_i} \tag{6.45}$$

Fazendo notar que na parede comum entre duas células (Figura 6-28) o fluxo de corte tem sentidos opostos, então o ângulo de torção/unidade comprimento será dados pela Eq. (6.46).

$$\theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i}\left(q_i\oint_{S_i}\frac{ds_i}{t_i} - q_1\oint_{S_{i1}}\frac{ds_{i1}}{t_{i1}} - q_n\oint_{S_{in}}\frac{ds_{in}}{t_{in}}\right) \tag{6.46}$$

Em que S_{i1} e S_{in} são as paredes comuns entre a célula i e as células 1 e n. Note-se que o exemplo da Figura 6-28 pode ser generalizado obtendo-se a Eq. (6.47), em que k é o número de paredes comuns com a célula i. Além disso, uma das hipóteses colocadas desde início é de que não há distorção no próprio plano da secção transversal, o que implica que o ângulo de torção/unidade comprimento de cada célula seja idêntico.

$$\theta_1 = \ldots = \theta_i = \ldots = \theta_n \equiv \theta$$
$$\theta \equiv \theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i}\left(q_i \oint_{S_i} \frac{ds_i}{t_i} - \sum_{j=1}^{k} q_j \oint_{S_{ij}} \frac{ds_{ij}}{t_{ij}} \right) \tag{6.47}$$

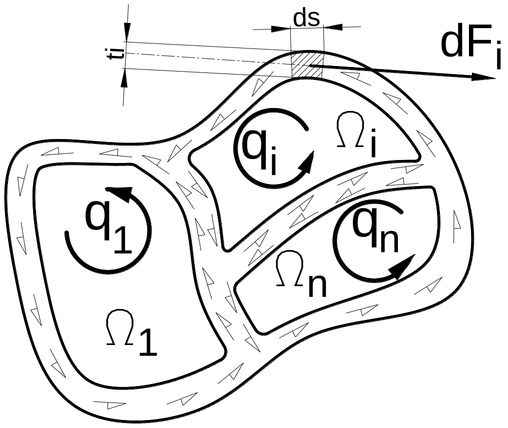


Figura 6-28 – Fluxo de corte em perfis multicelulares.

6.7.1 Exemplo 6.10 - Secção com 2 células

Um tubo longo (3m) numa liga de Alumínio (G=27.1GPa), é sujeito a um momento torsor T=11KN.m. As dimensões da secção transversal encontram-se na Figura 6-29.

Determinar a máxima tensão de corte e o ângulo de torção.

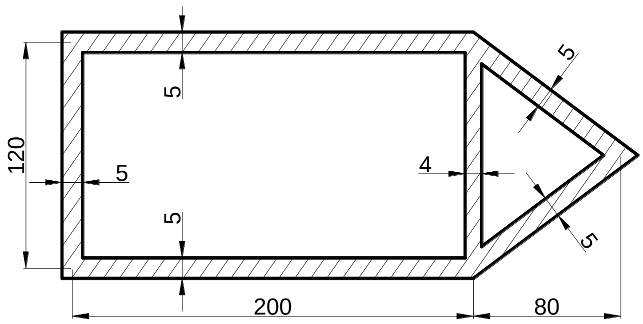


Figura 6-29 – Secção do Exemplo 6.10

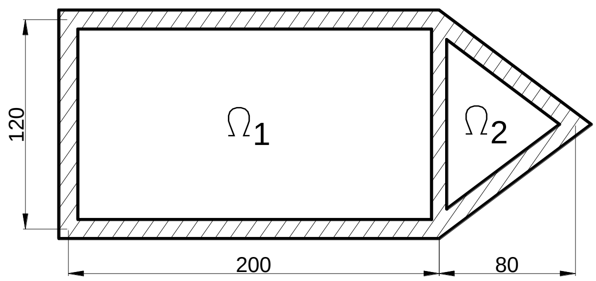
Resolução

O momento torsor (T) relaciona-se com o fluxo de corte (q_i) e com a área interna de cada célula (Ω_i) pela expressão (a).

$$T = 2\sum_{i=1}^{n} q_i \Omega_i \qquad \text{(a)}$$

Enquanto o ângulo de torção/unidade de comprimento em cada célula é dado por:

$$\theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i} \oint_{s_i} \frac{q\,ds}{t} \qquad \text{(b)}$$



A eq. (a) tem duas incógnitas (q_1 e q_2), pelo que teremos de encontrar mais uma equação. Como todas as células terão de torcer o mesmo ângulo/unidade de comprimento, surge a equação de compatibilidade de torção entre elas:

$$\frac{1}{2G\Omega_1}\oint_{s_1}\frac{qds}{t}=\frac{1}{2G\Omega_2}\oint_{s_2}\frac{qds}{t}=\ldots \qquad \text{(c)}$$

Que nos permite ter as equações necessárias à obtenção da solução do problema, os fluxos de corte q_i

Finalmente o ângulo de torção/unidade de comprimento é então

$$\theta=\frac{1}{2G\Omega_i}\left[q_i\oint_{s_i}\frac{ds}{t}-\sum_{j=1}^{m}\left(q_j\int_{s_{ij}}\frac{ds}{t}\right)\right] \qquad \text{(d)}$$

Neste problema em concreto, temos:

$$\Omega_1=200\times10^{-3}\times120\times10^{-3}=24000\times10^{-6}\,m^2$$

$$\Omega_2=\frac{1}{2}120\times10^{-3}\times80\times10^{-3}=4800\times10^{-6}\,m$$

Da Eq. (a) $\quad T=2\times(\Omega_1q_1+\Omega_2q_2) \quad \Leftrightarrow \quad 48000\times10^{-6}q_1+9600\times10^{-6}q_2=11000 \qquad$ (e)

Da Eq. (c) obtemos a expressão (g). Note-se que na parede comum às duas células o fluxo de corte é a diferença entre q_1 e q_2, o qual será positivo ou negativo dependendo do sentido da circulação.

$$\theta=\frac{1}{2G\times24\times10^{-3}}\left[\frac{(200+120+200)q_1}{5}+\frac{120(q_1-q_2)}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{2G\times4800\times10^{-6}}\left[\frac{\left(2\times\sqrt{80^2+60^2}\right)q_2}{5}+\frac{120(q_2-q_1)}{4}\right]$$

(g)

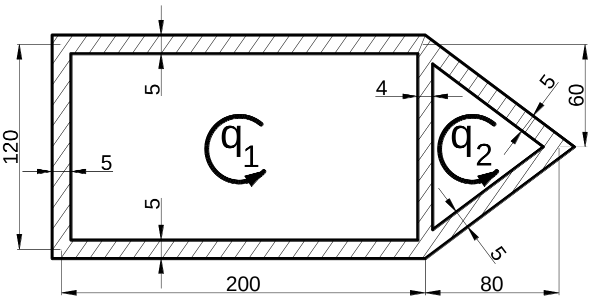


Figura 6-30 - Fluxos de corte do Exemplo 6.10

Simplificando os termos obtemos a equação $\quad q_1=1.338q_2 \qquad$ (h)

Resolvendo o sistema de equações (e) e (h),

$$\begin{cases}48000\times10^{-6}q_1+9600\times10^{-6}q_2=11000\\ q_1=1.338q_2\end{cases}$$

obtemos $\quad q_1=199.4N/mm \quad q_2=149N/mm$

e de seguida a tensão de corte máxima: $\quad \tau_{max}=\left(\frac{q}{t}\right)_{max}=\frac{q_1}{5}=39.9MPa$

O ângulo de rotação é

$$\alpha = \theta L = \frac{L}{2G\Omega_i}\left[q_i \oint_{s_i} \frac{ds}{t} - \sum_{j=1}^{m}\left(q_j \int_{s_{jr}} \frac{ds}{t} \right) \right] =$$

$$\frac{3}{2\times 27.1\times 10^{9}\times 24000\times 10^{-6}}\left[\frac{520\times 199.4}{5} + \frac{120(199.4-149)}{4} \right] = 0.0513\text{rad}$$

Onde L é o comprimento do tubo (3m) e θ um dos termos da expressão (g), já que o ângulo de torção de cada uma das células é idêntico.

6.7.2 Exemplo 6.11 - Secção com 3 células

A secção fechada de parede fina tem espessura uniforme (Figura 6-31). Mostrar que nas paredes BC, CD e CF as tensões de corte devidas à torção são nulas.

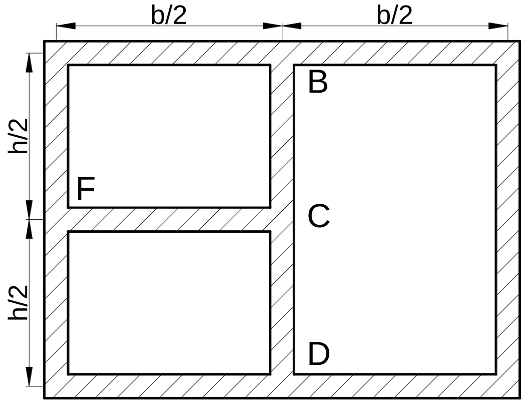


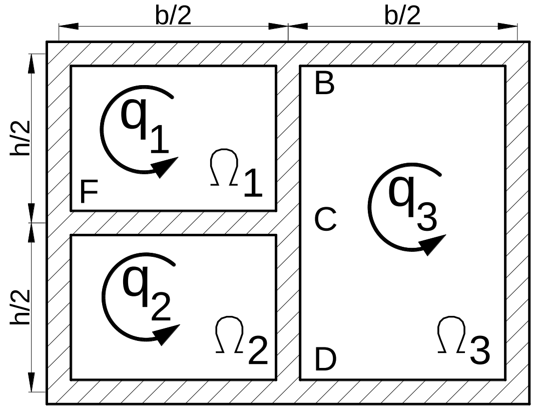
Figura 6-31 – Secção de 3 células.

Resolução

Como a espessura é constante, as áreas fechadas são:

$$\Omega_3 = 2\Omega_1 = 2\Omega_2$$

As duas equações de compatibilidade que se aplicam são:



$$\theta = \frac{1}{2G\times\Omega_1 t}\left[q_1\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\right) + (q_1-q_2)\frac{b}{2} + (q_1-q_3)\frac{h}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2G\times\Omega_2 t}\left[q_2\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\right) + (q_2-q_1)\frac{b}{2} + (q_2-q_3)\frac{h}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2G\times\Omega_3 t}\left[q_3\left(\frac{b}{2}+h+\frac{b}{2}\right) + (q_3-q_1)\frac{h}{2} + (q_3-q_2)\frac{h}{2} \right]$$

Que resultam em:

$$q_1\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\right) + (q_1-q_2)\frac{b}{2} + (q_1-q_3)\frac{h}{2} = q_2\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\right) + (q_2-q_1)\frac{b}{2} + (q_2-q_3)\frac{h}{2} \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_2$$

$$q_1\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\right) + (q_1-q_2)\frac{b}{2} + (q_1-q_3)\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\left[q_3\left(\frac{b}{2}+h+\frac{b}{2}\right) + (q_3-q_1)\frac{h}{2} + (q_3-q_2)\frac{h}{2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_3$$

Como $q_1 = q_2 = q_3$, significa que o fluxo de corte nas paredes comuns circula em oposição e consequentemente as tensões de corte são nulas nas paredes interiores.

6.8 Problemas sugeridos

6.8.1 Problema 1

Deduza as expressões (6.8) para pequenos ângulos de rotação.

6.8.2 Problema 2 (Teste, ver Secção 9.8, página 202)

Considere um veio de parede fina de secção em "U" equilátera sujeito a um momento torsor T, conforme se mostra na figura a). A espessura da parede é t = a / 10:

a) Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio.

b) As abas verticais foram dobradas um pouco mais de forma a que a secção resulte num triângulo equilátero aberto, figura b). Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio neste caso.

c) Realizou-se de seguida uma soldadura para que a secção resulte num triângulo equilátero fechado de parede fina, figura c). Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio neste caso.

d) Para aumentar a rigidez torsional da alínea anterior, soldou-se uma placa de espessura t e altura a no interior do perfil anterior ligando um vértice ao meio do lado oposto, figura d). Qual a variação de rigidez torsional conseguida?

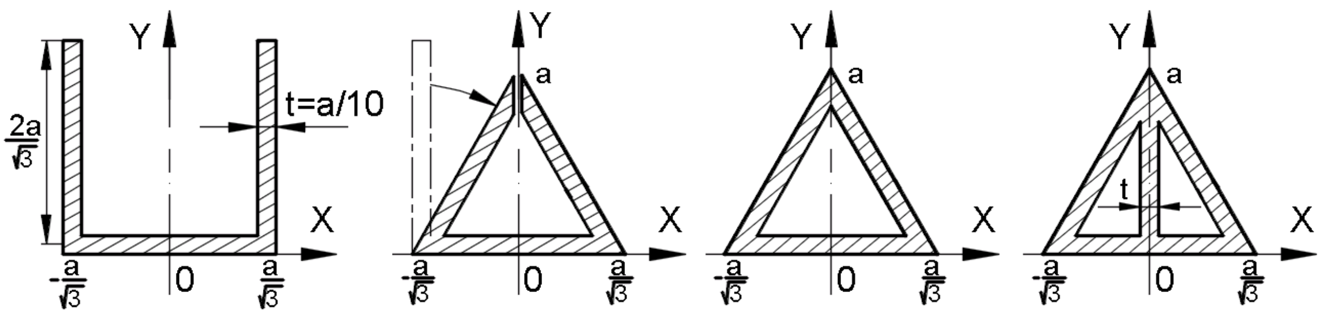


Figura a) Figura b) Figura c) Figura d)

6.8.3 Problema 3

Mostre que a Função de Tensão de Prandtl (ϕ , Eq. (6.14)) satisfaz as Equações de equilíbrio

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \; \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

6.8.4 Problema 4

Considere a torção de uma barra circular de raio R. Mostre que a função $\phi = \frac{1}{2}\left(R^2 - x_1^2 - x_2^2\right)$

é uma função tensão de Prandtl. Calcule a rigidez torsional da barra, e mostre que $J=I_p$. Calcule o estado de tensão associado e mostre que a tensão de corte resultante nos topos da barra é radial.

6.8.5 Problema 5

Considere dois veios com a mesma área da secção transversal e feitos do mesmo material linear elástico, um de secção circular e outro de secção elítica com relação 2:1 nos semieixos. Determine o cociente entre as tensões de corte máximas nos dois veios para:

a) Igual momento de torção aplicado nos dois veios
b) Igual ângulo de torção nos dois veios

6.8.6 Problema 6

Considere a célula base cuja secção transversal se mostra na Figura 6-32, obtida a partir de 3 chapas coladas entre si nas superfícies de contacto. Todas as chapas têm 1mm de espessura. A chapa do meio é quinada a 60° em intervalos de 70mm. O processo industrial de produção de placas estruturais consiste na repetição desta célula num padrão como se mostra na Figura 6-33.

O material das chapas é Aço (G=70GPa). O momento torsor aplicado é T=10 kN.m. Determine:

a) A constante de torção desta célula. Justifique as aproximações que fizer.
b) A tensão de corte máxima e indique onde ocorre. Justifique.
c) O ângulo de torção/unidade de comprimento.
d) Sabendo que a tensão de corte máxima deste Aço é $\tau_{máx} = 90\text{MPa}$, calcule o número mínimo de células para suportar o momento aplicado.

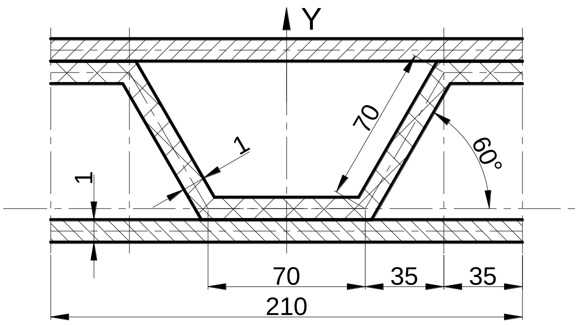


Figura 6-32 – Secção feita de chapas coladas entre si.

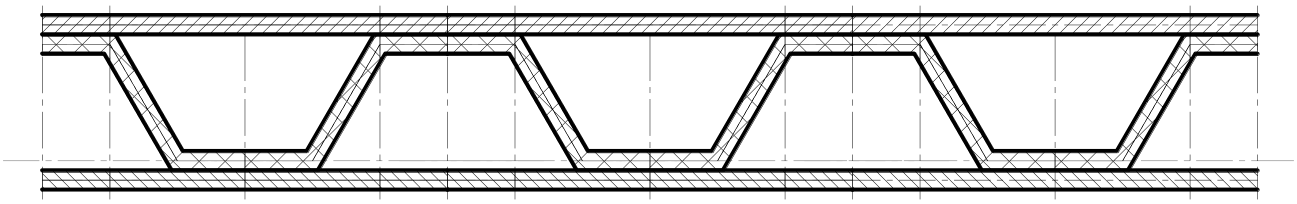


Figura 6-33 - Placa estrutural.

6.8.7 Problema 7

Considere as secções transversais da Figura 6-34, com as mesmas dimensões e feitas do mesmo material linear elástico. Considere que a<<t.

Dados: G=45GPa R=50mm t=2mm

Calcule:

a) O momento torsor máximo que se pode aplicar a cada um dos veios para que a tensão de corte máxima não ultrapasse 100MPa.
b) O ângulo de torção/unidade de comprimento em cada caso da alínea anterior.

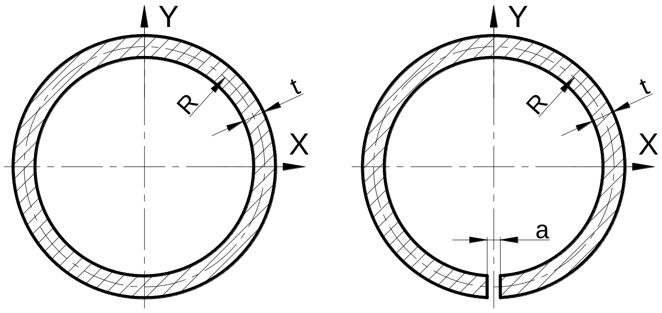


Figura 6-34 - Secções em anel.