

4 Deformação

Notação:

Grandeza	Notação Vetorial	Notação Indicial	Ordem do Tensor
função de deformação	$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$	$x_i = f_i(a_1, a_2, a_3)$	1
Deslocamento no ponto \mathbf{a}	$\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$	$u_i = x_i - a_i$	1
gradiente da deformação no ponto \mathbf{a}	$\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$	$F_{ij} = \partial f_i / \partial a_j$	2
alongamento no ponto \mathbf{a} na direção \mathbf{n}^a	$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{n}^a)$	$\lambda(a_1, a_2, a_3, n_1^a, n_2^a, n_3^a)$	0
tensor das deformações de Cauchy-Green no ponto \mathbf{a}	$\mathbf{C}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{a})^T \mathbf{F}(\mathbf{a})$	$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$	2
tensor das deformações \mathbf{E}	$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$	$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right)$	2
tensores das deformações infinitesimais	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ $\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^T)$	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right)$ $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$	2
Extensão normal infinitesimal	$\varepsilon_n = (\mathbf{n})^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}$	$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j$	0
Distorção entre duas direções ortogonais	$\varepsilon^{12} = (\mathbf{n}^1)^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}^2$	$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{ij} n_i^1 n_j^2$	0

4.1 Corpos. Deformações. Deformações homogéneas

Todos os corpos ocupam regiões do espaço. Um determinado corpo ocupará diferentes regiões em diferentes instantes. Para identificar os pontos do corpo escolhe-se uma dessas regiões, que designaremos por C , como região de referência e identificam-se os pontos do corpo com as posições que ocupam em C . A escolha da região de referência deve-se normalmente a razões de conveniência e simplicidade, como por exemplo ser a região que o corpo ocupa quando não tem forças aplicadas.

Na região de referência os pontos \mathbf{a} do corpo C têm coordenadas (a_1, a_2, a_3) relativamente a um referencial cartesiano escolhido.

Quando sujeitos a forças os corpos deformam-se. Um elástico alonga quando é esticado, uma barra encurta quando é comprimida e flete ou torce quando lhe é aplicado um momento. Ao deformar-se um corpo muda de posição, de orientação, de forma e de dimensões e é essa deformação que cria a reação à ação exterior.

A deformação dum corpo é descrita por uma função \mathbf{f} , designada por função deformação, que associa a região de referência à posição deformada do corpo, fazendo corresponder a cada ponto \mathbf{a} a sua localização final \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad x_i = f_i(a_1, a_2, a_3). \quad (4.1)$$

O vetor

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \quad u_i = x_i - a_i \quad (4.2)$$

define o deslocamento do ponto \mathbf{a} (Figura 4-1). Quando \mathbf{u} é constante, a deformação \mathbf{f} é uma translação, descrita pelas equações

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{a}, \quad x_i = t_i + a_i$$

em que \mathbf{t} é um vetor independente da posição.

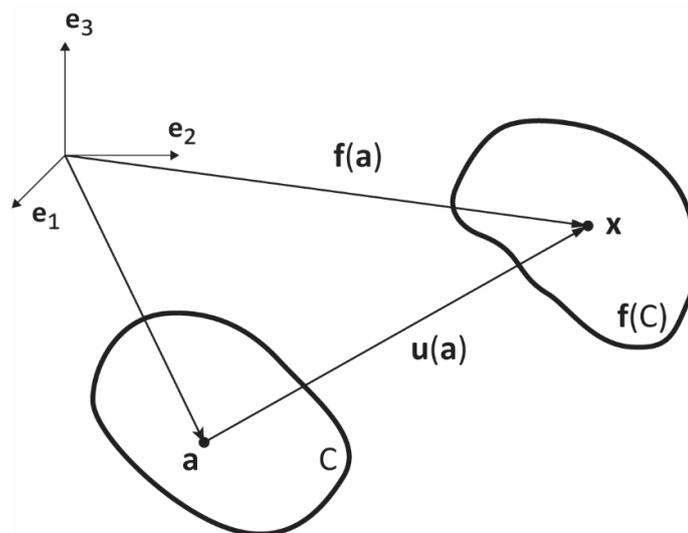


Figura 4-1 – Deformação de um corpo da região de referencia para a posição deformada

Nos pontos \mathbf{a} em que \mathbf{f} é diferenciável, o tensor $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$ com componentes

$$[\mathbf{F}] = [\nabla \mathbf{f}] = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial a_1 & \partial f_1 / \partial a_2 & \partial f_1 / \partial a_3 \\ \partial f_2 / \partial a_1 & \partial f_2 / \partial a_2 & \partial f_2 / \partial a_3 \\ \partial f_3 / \partial a_1 & \partial f_3 / \partial a_2 & \partial f_3 / \partial a_3 \end{bmatrix}, \quad F_{ij} = \partial f_i / \partial a_j \quad (4.3)$$

é designado por gradiente da deformação. Como se verá adiante, o determinante do gradiente de deformação, $\det \mathbf{F}(\mathbf{a})$, dá, na vizinhança de cada ponto, o volume depois da deformação por unidade de volume. Como um volume finito não pode ser comprimido até se anular, $\det \mathbf{F}(\mathbf{a}) \neq 0$. Não pode igualmente ser negativo, pois isso implicaria que, num processo de deformação contínuo desde a região de referência, $\det \mathbf{F}(\mathbf{a})$ teria de se anular em algum instante. A função deformação \mathbf{f} terá então de satisfazer, nos pontos do corpo em que é diferenciável, a condição $\det \mathbf{F} > 0$.

Uma deformação em que \mathbf{F} é constante chama-se homogénea e é descrita por

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{F} \mathbf{a}, \quad x_i = t_i + F_{ij} a_j \quad (4.4)$$

em que as componentes de \mathbf{t} e \mathbf{F} são constantes. Deformações homogéneas têm várias propriedades, incluindo:

- i) Planos na região de referência permanecem planos depois da deformação; dois planos paralelos permanecem paralelos depois da deformação.
- ii) Retas na região de referência permanecem retas depois da deformação; duas retas paralelas permanecem paralelas depois da deformação.
- iii) Superfícies esféricas passam a superfícies elipsoidais; circunferências tornam-se elipses.

Verifiquemos a propriedade i). A equação de um plano na região de referência do corpo é dada por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = d,$$

em que \mathbf{n} é a normal ao plano e d a sua distância à origem do referencial. Depois da deformação, os pontos desse plano terão, utilizando (4.4), uma posição \mathbf{x} dada por

$$\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = d$$

expressão que, pela definição de transposta de um tensor, define um plano cuja normal é $\mathbf{F}^T \mathbf{n}$

$$\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n}.$$

4.1.1 Exemplo

Um exemplo de deformação homogénea é uma rotação em torno da origem O do referencial, dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad (4.5)$$

em que \mathbf{R} é um tensor rotação, um tensor ortogonal com determinante positivo, i.e. $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ e $\det \mathbf{R} = +1$, constante em todos os pontos do corpo. Na rotação representada na Figura 4-2, o corpo roda de um ângulo θ em torno de a_3 , no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Neste caso a função deformação é dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

e $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f} = \mathbf{R}$. Se a rotação for em torno do ponto \mathbf{b} ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{R} (\mathbf{a} - \mathbf{b}). \quad (4.7)$$

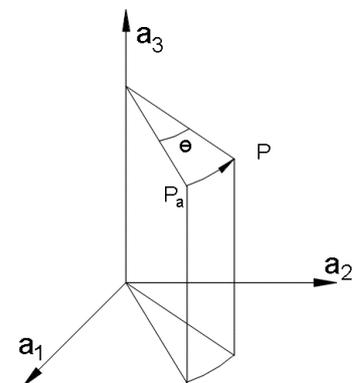


Figura 4-2 – Rotação em torno de a_3 .

4.1.2 Exemplo

Um segundo exemplo de deformação homogénea é a deformação denominada extensão uniforme: um corpo, por exemplo uma barra fixa na origem, é alongado uniformemente até ficar com um comprimento λ_1 vezes o seu comprimento inicial. O campo de deformações é dado por $x_1 = \lambda_1 a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ e define uma extensão uniforme na direção x_1 .

Se o corpo sofre extensões uniformes nas três direções dos eixos coordenados, a deformação é descrita por

$$x_1 = \lambda_1 a_1, x_2 = \lambda_2 a_2, x_3 = \lambda_3 a_3, \quad [F] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

em que λ_1 , λ_2 e λ_3 são constantes positivas. O caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ representa uma dilatação, uma extensão uniforme nas três direções. No caso $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3^{-1}$, as secções normais a x_1 conservam a área e a deformação denomina-se de corte puro (exemplo 4.15.3). Se a extensão uniforme do corpo tiver um ponto fixo \mathbf{b} (em que $\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$),

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + F(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (4.9)$$

4.2 Alongamento de segmentos em deformações homogéneas

Considere-se, na região de referência do corpo C , um segmento de reta de comprimento ℓ^a , com a direção do vetor unitário \mathbf{n}^a e que liga o ponto \mathbf{a} de coordenadas (a_1, a_2, a_3) ao ponto $\mathbf{a} + \ell^a \mathbf{n}^a$ de coordenadas $(a_1 + \ell^a n_1^a, a_2 + \ell^a n_2^a, a_3 + \ell^a n_3^a)$.

Sujeito a uma deformação homogénea \mathbf{f} , o segmento de reta permanece um segmento de reta mas muda de posição, orientação e comprimento. O ponto \mathbf{a} irá ocupar a posição \mathbf{x} e o ponto $\mathbf{a} + \ell^a \mathbf{n}^a$ a posição $\mathbf{x} + \ell^x \mathbf{n}^x$: o comprimento do segmento passa a ser ℓ^x e a sua direção \mathbf{n}^x (ver Figura 4-3). Pela definição de deformação homogénea (4.4),

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{t} + F \mathbf{a}, \\ \mathbf{x} + \ell^x \mathbf{n}^x &= \mathbf{f}(\mathbf{a} + \ell^a \mathbf{n}^a) = \mathbf{t} + F(\mathbf{a} + \ell^a \mathbf{n}^a), \\ &= \mathbf{t} + F \mathbf{a} + \ell^a F \mathbf{n}^a. \end{aligned}$$

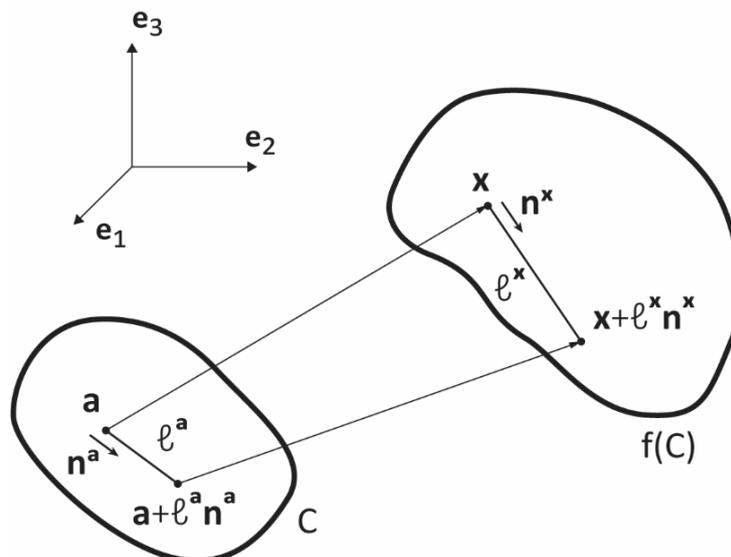


Figura 4-3 - Alongamento de segmentos de reta em deformações homogéneas

Subtraindo membro a membro as equações anteriores obtemos

$$\ell^x \mathbf{n}^x = \ell^a \mathbf{F} \mathbf{n}^a,$$

e dividindo pelo comprimento inicial ℓ^a ,

$$(\ell^x/\ell^a) \mathbf{n}^x = \mathbf{F} \mathbf{n}^a, \quad (\ell^x/\ell^a) n_i^x = F_{ij} n_j^a \quad (4.10)$$

O quociente $\lambda = \ell^x/\ell^a$ designa-se por alongamento e é a razão entre o comprimento final e o comprimento inicial de um segmento inicialmente orientado na direção \mathbf{n}^a . O alongamento é sempre um número positivo; se menor que 1 o segmento encurta e se maior que 1, estica.

Para resolver as equações anteriores juntamente com a condição que \mathbf{n}^x é um vetor unitário, elimina-se \mathbf{n}^x da equação anterior calculando a magnitude de $\lambda \mathbf{n}^x$:

$$\lambda \mathbf{n}^x \cdot \lambda \mathbf{n}^x = \mathbf{F} \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{F} \mathbf{n}^a$$

$$\lambda^2 = \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a \text{ pela definição de transposta} \quad (4.11)$$

$$= (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a, \quad \lambda^2 = F_{ki} F_{kj} n_i^a n_j^a$$

Determinado λ a partir do produto $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$, a orientação final \mathbf{n}^x do segmento de reta é dada por

$$\mathbf{n}^x = \lambda^{-1} \mathbf{F} \mathbf{n}^a, \quad n_i^x = \lambda^{-1} F_{ij} n_j^a \quad (4.12)$$

Note-se que, como a deformação é homogénea, todos os segmentos do corpo com a mesma orientação inicial sofrem o mesmo alongamento e ficam com a mesma orientação final.

4.2.1 Exemplo

Consideremos um corpo com a forma de um cubo que sofre a deformação homogénea $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ definida pelas componentes

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 + \gamma a_3, \quad x_3 = a_3, \quad (4.13)$$

em que $\gamma = \text{tg } \theta$ é a deformação de corte (Fig. 4.4). As matrizes com os componentes do gradiente da deformação \mathbf{F} e do produto $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ são dadas por

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}^T \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & \gamma^2 + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

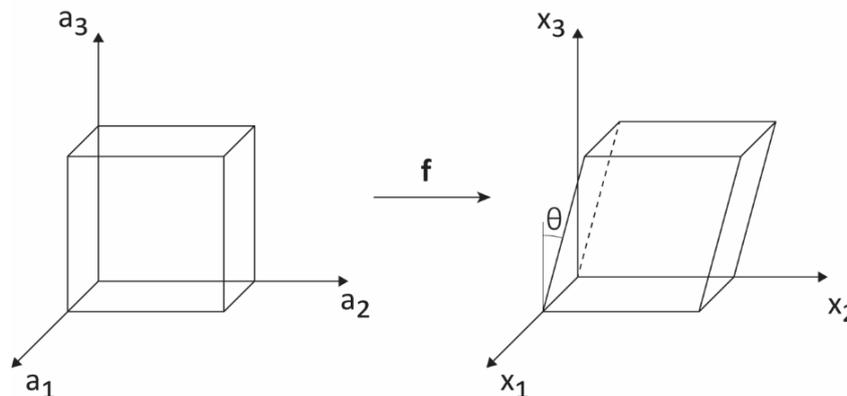


Figura 4-4 - Deformação de corte simples

De (4.11) e (4.12) calculamos que o alongamento da aresta na direção de \mathbf{e}_3 é $\sqrt{\gamma^2 + 1}$ e que a sua direção depois da deformação é $(0, \gamma / \sqrt{\gamma^2 + 1}, 1 / \sqrt{\gamma^2 + 1})$. De notar que as faces paralelas ao plano $a_2 a_3$ conservam a área. Designa-se esta deformação por corte simples.

4.2.2 Exemplo

Consideremos agora o cubo sujeito a uma deformação homogénea de corte puro dada por

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = \lambda_2 a_2, \quad x_3 = \lambda_2^{-1} a_3, \quad (4.15)$$

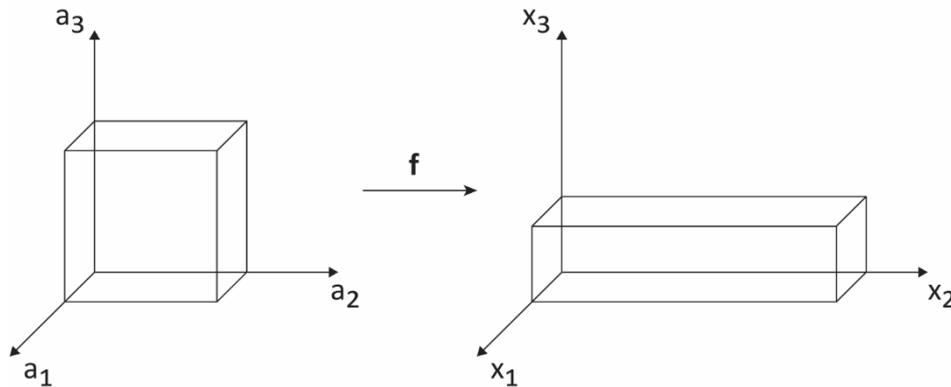


Figura 4-5 - Deformação de corte puro

e representada na Figura 4-5 para $\lambda_2 = 2$. Nesta deformação as faces paralelas ao plano $a_2 a_3$ conservam igualmente a área.

Começamos por determinar o alongamento da diagonal do cubo na direção $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ e a sua direção depois da deformação. O gradiente da deformação \mathbf{F} e o produto $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ são dados por

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}^T \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{-2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

e de (4.11) obtemos $\lambda^2 = (1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}) / 3$, $\lambda = \sqrt{(1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}) / 3}$. A orientação final da diagonal é dada por (4.12), $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3} \lambda_2/3, \sqrt{3} \lambda_2^{-1}/3) / \sqrt{(1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}) / 3}$. Para $\lambda_2 = 2$, $\lambda = \sqrt{7/4}$ e $\mathbf{n}^x = (\sqrt{4/21}, \sqrt{16/21}, 1/\sqrt{21})$.

Determinemos agora quais as direções em que, nesta deformação, segmentos do cubo mantêm o comprimento depois da deformação. Trata-se de determinar os valores de n^a_1 , n^a_2 e n^a_3 que verificam (4.11) com $\lambda = 1$,

$$1 = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a,$$

sujeitos à condição de \mathbf{n}^a ser um vetor unitário, $n^a_1{}^2 + n^a_2{}^2 + n^a_3{}^2 = 1$. Obtemos o sistema

$$n^a_1{}^2 + \lambda_2^2 n^a_2{}^2 + \lambda_2^{-2} n^a_3{}^2 = 1$$

$$n^a_1{}^2 + n^a_2{}^2 + n^a_3{}^2 = 1,$$

em que a primeira equação descreve um elipsoide de semieixos $1, \lambda_2^{-1}$ e λ_2 e a segunda equação uma esfera de raio unitário. A sua interseção é a solução do sistema: duas circunferências cujos planos têm normais $(0, +/- 1/\sqrt{1 + \lambda_2^2}, +/- \lambda/\sqrt{1 + \lambda_2^2})$ e cujas projeções em $n^a_1 n^a_2$ e $n^a_2 n^a_3$ são a elipse $n^a_1{}^2 + (\lambda_2^2 + 1) n^a_2{}^2 = 1$ e as retas $\lambda_2^2 n^a_2{}^2 = n^a_3{}^2$, respetivamente. Na Figura 4-6 representa-se o caso em que $\lambda_2 = 2$.

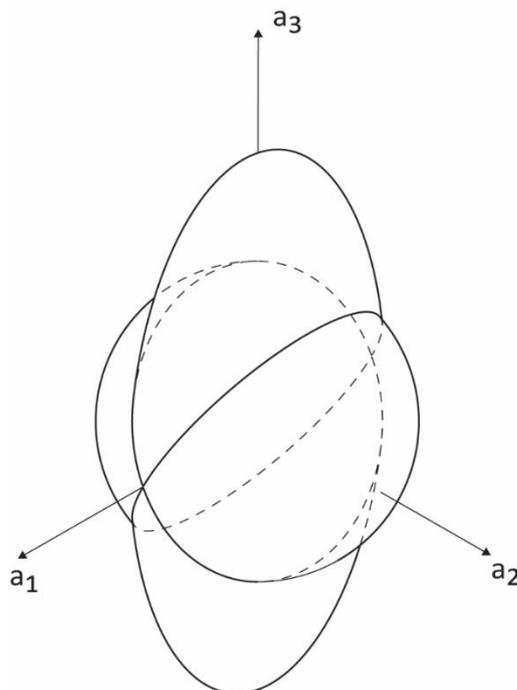


Figura 4-6– Interseção do elipsoide com esfera, definindo as direções com alongamento unitário

Determinemos agora as direções dos segmentos do cubo que, quando sujeito à deformação homogénea de corte puro anterior, mantêm a orientação inicial, isto é, determinemos n^{a_1} , n^{a_2} e n^{a_3} para o caso em que na expressão (4.12) $n^x = n^a$,

$$\lambda n^a = \mathbf{F} n^a.$$

Trata-se do problema de valores e vetores próprios

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}) n^a = \mathbf{0},$$

em que, neste exemplo, \mathbf{F} é diagonal: os valores próprios são os próprios termos da diagonal, $1, \lambda, \lambda^{-1}$ e os vetores próprios associados são as direções que não rodam: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

4.3 Decomposição de uma deformação homogénea: tensor alongamento \mathbf{U} e tensor rotação \mathbf{R} . Ângulo entre segmentos.

Pelo teorema da decomposição polar, qualquer tensor de segunda ordem \mathbf{F} , com $\det \mathbf{F} > 0$ (como acontece com o gradiente da deformação), pode ser decomposto num produto de dois tensores \mathbf{R} e \mathbf{U} , em que \mathbf{R} é um tensor ortogonal (i.e. $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ e $\det \mathbf{R} = +1$) e \mathbf{U} um tensor simétrico e positivo definido (i.e. $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} \mathbf{v} > 0$ para todos os vetores $\mathbf{v} \neq 0$), tal que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}, \quad F_{ij} = R_{ik} U_{kj}. \quad (4.17)$$

Em termos de deformações podemos interpretar a decomposição anterior da seguinte forma: na deformação homogénea \mathbf{f} , dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{F} \mathbf{a},$$

o corpo C passa por duas deformações homogéneas sucessivas \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 , sendo \mathbf{f} a deformação composta $\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1$. Primeiro o ponto \mathbf{a} desloca-se para a posição intermédia \mathbf{y} e depois para a posição final \mathbf{x} , sendo

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{a}, \mathbf{U} = \nabla \mathbf{f}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{y}, \mathbf{R} = \nabla \mathbf{f}_2.$$

A primeira deformação corresponde ao tensor simétrico \mathbf{U} e a segunda é uma rotação rígida devida ao tensor ortogonal \mathbf{R} , como no exemplo da secção 4.2. Estas duas deformações sucessivas são equivalentes a \mathbf{f} pois

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{a} = \mathbf{F} \mathbf{a}.$$

Se voltarmos à expressão (4.11) para calcular o alongamento e nela introduzirmos a decomposição de \mathbf{F} ,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a \\ &= \mathbf{n}^a \cdot (\mathbf{R} \mathbf{U})^T \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^a \\ &= \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^a \\ &= \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^a \quad \text{devido à ortogonalidade de } \mathbf{R}, \\ &= (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^a, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde se conclui que o alongamento de segmentos se deve à ação de \mathbf{U} e não a \mathbf{R} . O tensor \mathbf{U} é assim designado tensor alongamento.

Sejam agora dois segmentos com origem no ponto \mathbf{a} , de comprimento ℓ^{1a} e ℓ^{2a} e direção \mathbf{n}^{1a} e \mathbf{n}^{2a} , respetivamente. O ângulo θ^a entre os dois segmentos (ver Fig. 4-7) obtém-se da expressão do seu produto interno,

$$\begin{aligned} \cos \theta^a &= \ell^{1a} \mathbf{n}^{1a} \cdot \ell^{2a} \mathbf{n}^{2a} / (|\ell^{1a} \mathbf{n}^{1a}| |\ell^{2a} \mathbf{n}^{2a}|), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ &= \ell^{1a} \ell^{2a} (\mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{n}^{2a}) / (\ell^{1a} \ell^{2a} |\mathbf{n}^{1a}| |\mathbf{n}^{2a}|), \\ &= (\mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{n}^{2a}) / (|\mathbf{n}^{1a}| |\mathbf{n}^{2a}|). \end{aligned}$$

Em notação indicial $\cos \theta^a = n_i^{1a} n_i^{2a} / (\sqrt{n_j^{1a} n_j^{1a}} \sqrt{n_k^{2a} n_k^{2a}})$.

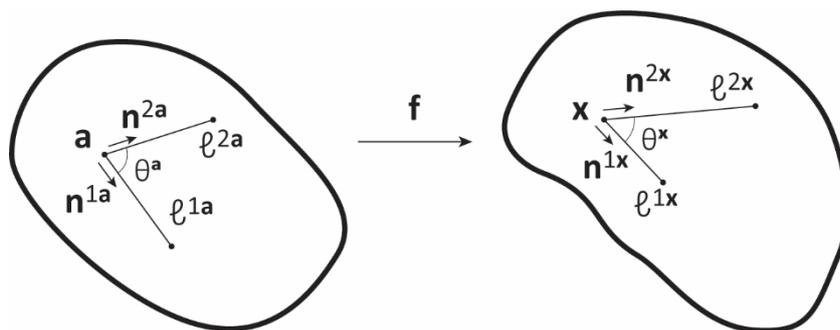


Figura 4-7– Variação do ângulo entre segmentos em deformações homogéneas

Depois da deformação o ângulo entre os vetores na posição deformada passa a ser

$$\begin{aligned} \cos \theta^x &= \mathbf{F}(\ell^{1a} \mathbf{n}^{1a}) \cdot \mathbf{F}(\ell^{2a} \mathbf{n}^{2a}) / |\mathbf{F}(\ell^{1a} \mathbf{n}^{1a})| |\mathbf{F}(\ell^{2a} \mathbf{n}^{2a})|, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ &= \ell^{1a} \ell^{2a} \mathbf{F} \mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{F} \mathbf{n}^{2a} / (\ell^{1a} \ell^{2a} |\mathbf{F} \mathbf{n}^{1a}| |\mathbf{F} \mathbf{n}^{2a}|), \\ &= \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a})} \sqrt{(\mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a} \cdot \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a})}) \\ &= \mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a})} \sqrt{(\mathbf{n}^{2a} \cdot \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a})}) \\ &= (\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a}} \sqrt{(\mathbf{n}^{2a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a}}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

A variação do ângulo entre vetores devida à deformação é medida por \mathbf{U} e não por \mathbf{R} , que apenas origina uma rotação rígida do corpo sem que haja variação de forma e dimensões. O tensor $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$ que aparece nos cálculos do alongamento e do ângulo final entre vetores designa-se por tensor de Cauchy-Green \mathbf{C} e podemos escrever

$$\lambda^2 = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{C} \mathbf{n}^a, \quad \lambda^2 = C_{ij} n_i^a n_j^a \quad (4.20)$$

$$\cos \theta^x = (\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{1a}} \sqrt{(\mathbf{n}^{2a})^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{2a}}), \quad \cos \theta^x = C_{ij} n_i^{1a} n_j^{2a} / (\sqrt{C_{kl} n_k^{1a} n_l^{1a}} \sqrt{C_{mn} n_m^{2a} n_n^{2a}}) \quad (4.21)$$

4.3.1 Exemplo

Um corpo que na região de referencia é um cubo unitário com as arestas paralelas aos eixos do referencial sofre a seguinte deformação homogénea, em que α_1, α_2 e α_3 são constantes:

$$x_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \quad x_2 = -\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \quad x_3 = \alpha_3 a_3.$$

Esta deformação pode ser definida na forma $\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{a}$, em que

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ e $\det \mathbf{R} = +1$, que $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ e os seus valores próprios são positivos e que

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 4-8 está representado o cubo na posição inicial e na posição deformada para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$. A contração não uniforme do cubo deve-se a \mathbf{U} e a rotação de corpo rígido em torno do eixo x_3 de $\pi/4$ = arccos (1/√2) deve-se a \mathbf{R} .

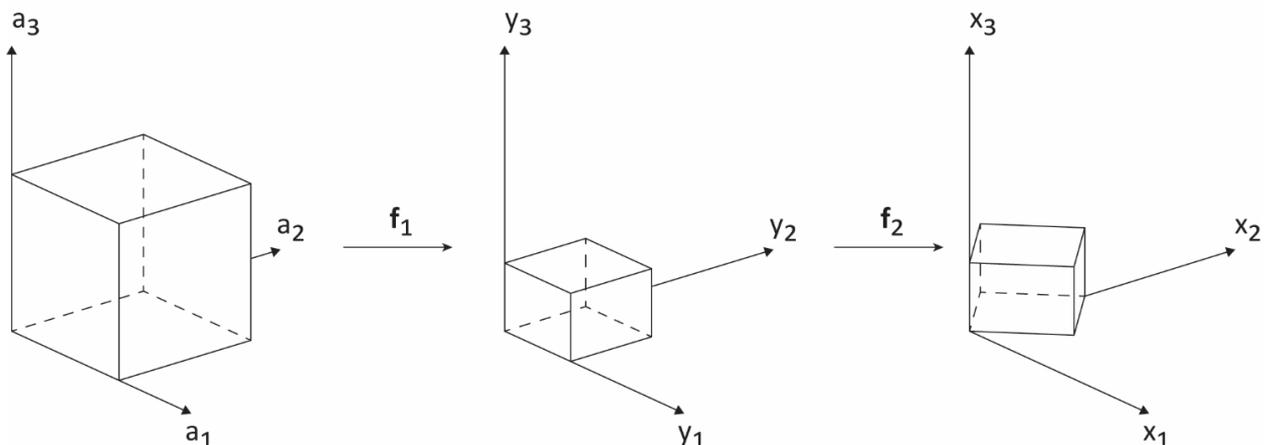


Figura 4-8– Decomposição de uma deformação homogénea

4.4 Deformações não homogêneas. Alongamento de segmentos. Ângulo entre segmentos.

Consideremos agora uma deformação não homogênea \mathbf{f} do corpo C , diferenciável num ponto \mathbf{a} de C . Expandindo em série a função deformação em torno de \mathbf{a} e para todos os pontos \mathbf{b} de C ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \text{termos de ordem superior à primeira em } (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (4.22)$$

Relembrando que $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a})$ é o gradiente de deformação em \mathbf{a} , a expressão anterior mostra que na vizinhança de um ponto \mathbf{a} , e a menos de um erro de ordem superior à primeira em $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, uma deformação comporta-se como uma deformação homogênea.

Seja agora $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ o vetor $\delta \ell^a \mathbf{n}^a$ de comprimento pequeno $\delta \ell^a$ e direção \mathbf{n}^a . Escrevendo (4.22) na forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \delta \ell^a \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a + \text{termos de ordem superior à primeira em } \delta \ell^a,$$

e o vetor $\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ na forma $\delta \ell^x \mathbf{n}^x$, obtemos

$$\delta \ell^x \mathbf{n}^x = \delta \ell^a \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a + \text{termos de ordem superior à primeira em } \delta \ell^a.$$

$$\text{No limite, quando } \delta \ell^a \rightarrow 0, \quad (d\ell^x / d\ell^a) \mathbf{n}^x = \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a. \quad (4.23)$$

O quociente diferencial $d\ell^x / d\ell^a$ é a razão entre os comprimentos final e inicial de um segmento infinitesimal situado inicialmente em \mathbf{a} e inicialmente orientado na direção \mathbf{n}^a . Esse quociente designa-se por alongamento e representa-se por λ , como no caso de deformações homogêneas, embora neste caso λ tenha um significado local, na vizinhança do ponto.

Calcula-se $\lambda = d\ell^x / d\ell^a$ eliminando o vetor unitário \mathbf{n}^x da equação anterior:

$$\lambda \mathbf{n}^x \cdot \lambda \mathbf{n}^x = \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a$$

$$\lambda^2 = \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{n}^a. \quad (4.24)$$

Determinado λ a partir do produto $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$, a orientação final \mathbf{n}^x do segmento de reta infinitesimal é dada por

$$\mathbf{n}^x = \lambda^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a. \quad (4.25)$$

Na situação geral que estamos agora a tratar a decomposição polar de \mathbf{F} definida na secção 4.5 é agora pontual e dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{R}(\mathbf{a}) \mathbf{U}(\mathbf{a}), \quad (4.26)$$

em que $\mathbf{R}(\mathbf{a})$ é o tensor rotação que mede a rotação rígida de pontos na vizinhança do ponto \mathbf{a} e $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ é o tensor alongamento, que mede o alongamento de segmentos infinitesimais que passam pelo ponto \mathbf{a} por uma fórmula equivalente a (4.18), mas local,

$$\lambda^2 = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{U}(\mathbf{a})^T \mathbf{U}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a. \quad (4.27)$$

O ângulo entre dois vetores θ^a com origem no ponto \mathbf{a} , de comprimentos $\delta \ell^{1a}$ e $\delta \ell^{2a}$ e direções \mathbf{n}^{1a} e \mathbf{n}^{2a} , respetivamente, é dado por

$$\cos \theta^a = (\mathbf{n}^{1a} \cdot \mathbf{n}^{2a}) / (|\mathbf{n}^{1a}| |\mathbf{n}^{2a}|), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Mostra-se que o ângulo entre $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \delta \ell^{1a} \mathbf{n}^{1a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \delta \ell^{2a} \mathbf{n}^{2a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ tende para o ângulo θ^x entre $\mathbf{U}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^{1a}$ e $\mathbf{U}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^{2a}$ quando $\delta \ell^{1a} \rightarrow 0$ e $\delta \ell^{2a} \rightarrow 0$, dado por

$$\cos \theta^x = (\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{1a}} \sqrt{(\mathbf{n}^{2a})^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{n}^{2a}}). \quad (4.28)$$

O cálculo de \mathbf{U} é geralmente difícil (porque necessita da raiz quadrada de $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$) mas o cálculo de $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ é imediato e por isso se utiliza, para caracterizar o estado de deformação num corpo, o tensor \mathbf{C} .

4.5 Tensor das deformações \mathbf{C} , de Cauchy-Green.

Define-se o tensor \mathbf{C} por

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (4.29)$$

cujas componentes C_{ij} são dadas por

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \partial f_k / \partial a_i \partial f_k / \partial a_j. \quad (4.30)$$

O tensor \mathbf{C} é um tensor simétrico de segunda ordem e é designado por tensor das deformações de Cauchy-Green. Para calcular alongamentos na vizinhança de um ponto temos a fórmula

$$\lambda^2 = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{C}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a, \lambda^2 = C_{ij} n_i^a n_j^a. \quad (4.31)$$

Para calcular ângulos finais entre segmentos na vizinhança temos a fórmula

$$\cos \theta^x = (\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{C}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^{2a} / (\sqrt{(\mathbf{n}^{1a})^T \mathbf{C}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^{1a}} \sqrt{(\mathbf{n}^{2a})^T \mathbf{C}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^{2a}}), \cos \theta^x = C_{ij} n_i^{1a} n_j^{2a} / (\sqrt{C_{kl} n_k^{1a} n_l^{1a}} \sqrt{C_{mn} n_m^{2a} n_n^{2a}}) \quad (4.32)$$

Para interpretar as componentes da diagonal de \mathbf{C} , escolhe-se, por exemplo, $\mathbf{n}^a = \mathbf{e}_1$ e a expressão (4.31) diz-nos que $(C_{11})^{1/2}$ é o alongamento do segmento elementar inicialmente orientado na direção \mathbf{e}_1 . Interpretação análoga se faz para C_{22} e C_{33} .

Os termos fora da diagonal de \mathbf{C} podem ser interpretados escolhendo $\mathbf{n}^{1a} = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{n}^{2a} = \mathbf{e}_2$ na fórmula (4.32), obtendo-se $\cos \theta^x = C_{12} / (C_{11} C_{22})^{1/2}$. Estão relacionados com a distorção (variação de ângulo) entre dois segmentos elementares na direção dos eixos que passam pelo ponto \mathbf{a} .

O tensor \mathbf{C} é utilizado como tensor das deformações pois, como se vê pela expressão (4.31) permite determinar o alongamento de qualquer segmento elementar que passe pelo ponto genérico \mathbf{a} , conhecida a sua direção inicial \mathbf{n}^a , bem como ângulos finais entre segmentos ortogonais. Além disso (ver Secção 4.12) permite distinguir facilmente entre deformações rígidas, em que a distância entre quaisquer dois pontos se mantém constante (embora a posição e orientação do corpo possa mudar) e deformações não rígidas em que a distância entre pontos do corpo varia.

4.5.1 Exemplo

Voltemos à deformação de corte simples 4.13. O tensor \mathbf{C} dessa deformação é dado por

$$\mathbf{C}_{\text{corte simples}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & \gamma^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $\gamma = \text{tg } \theta$ (ver Figura 4-4), os termos da diagonal dão o quadrado dos alongamentos de segmentos inicialmente orientados segundo os eixos. Nas direções \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 os comprimentos não se alteram e na direção \mathbf{a}_3 o quadrado do alongamento é $\gamma^2 + 1$.

O ângulo final entre segmentos inicialmente orientados das direções a_2 e a_3 é

$$\cos \theta^* = C_{23} / (C_{22} C_{33})^{1/2} = \gamma / (\gamma^2 + 1)^{1/2}$$

dado pelo quociente entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo e o comprimento da hipotenusa.

No segundo exemplo considere-se a deformação não homogénea definida em coordenadas cilíndricas

$$x_1 = r \cos \theta, \quad a_1 = R \cos \Theta$$

$$x_2 = r \sin \theta, \quad a_2 = R \sin \Theta$$

$$x_3 = z, \quad a_3 = Z$$

por

$$r = R, \quad \theta = \Theta + \alpha Z, \quad z = Z. \quad (4.33)$$

em que o ponto de coordenadas R, Θ, Z na região de referência vai ocupar a posição r, θ, z . Esta deformação designa-se por torção pura e descreve a situação de um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo Z que é uniformemente torcido ao longo do seu eixo, permanecendo as suas secções retas planas e normais ao eixo, ver Figura 4-9. A constante α designa o ângulo de torção por unidade de comprimento. O cilindro tem comprimento L e raio exterior a .

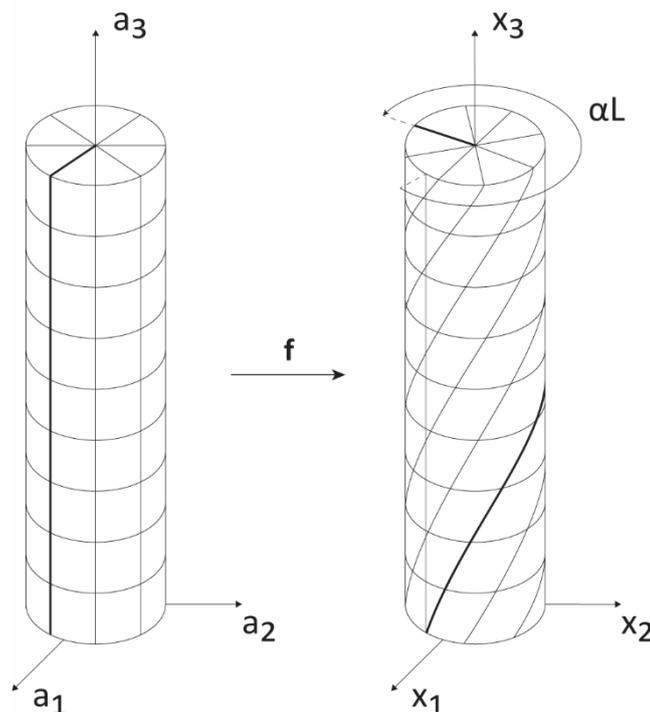


Figura 4-9 - Deformação de torção pura

Em coordenadas cartesianas a deformação é dada por

$$x_1 = a_1 \cos \beta - a_2 \sin \beta, \quad \beta = \alpha a_3$$

$$x_2 = a_1 \sin \beta + a_2 \cos \beta \quad (4.34)$$

$$x_3 = a_3$$

O gradiente da deformação \mathbf{F} e o tensor das deformações \mathbf{C} são dados por

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & -a_1 \alpha \sin \beta - a_2 \alpha \cos \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & a_1 \alpha \cos \beta - a_2 \alpha \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_2 \alpha \\ 0 & 1 & a_1 \alpha \\ -a_2 \alpha & a_1 \alpha & (a_1^2 + a_2^2) \alpha^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Note-se que se trata de uma deformação não homogénea. Em cada ponto é uma deformação de corte simples, como se pode concluir comparando com o tensor \mathbf{C} da deformação de corte simples do exemplo anterior.

Para interpretar as componentes desses tensores, considere o ponto do cilindro localizado em $a_1 = a$, $a_2 = 0$ e $a_3 = L$. O quadrado do alongamento da geratriz que passa por esse ponto é $(a^2 \alpha^2 L^2 + L^2) / L^2 = C_{33}(a, 0, L)$ e o ângulo θ entre a posição final da geratriz e a direção a_2 é dado por

$$\cos \theta = a \alpha L / (a^2 \alpha^2 L^2 + L^2)^{1/2} = a \alpha / (a^2 \alpha^2 + 1)^{1/2} = C_{23} / (C_{22} C_{33})^{1/2}.$$

4.6 Comprimento de curvas no corpo deformado.

Seja \mathbf{c} uma curva definida na região de referência do corpo C (\cdot). Uma curva é um conjunto ordenado de pontos (a_1, a_2, a_3) dados por três funções de um parâmetro t dum intervalo I ,

$$a_1 = c_1(t), \quad a_2 = c_2(t), \quad a_3 = c_3(t), \quad t \in I. \quad (4.36)$$

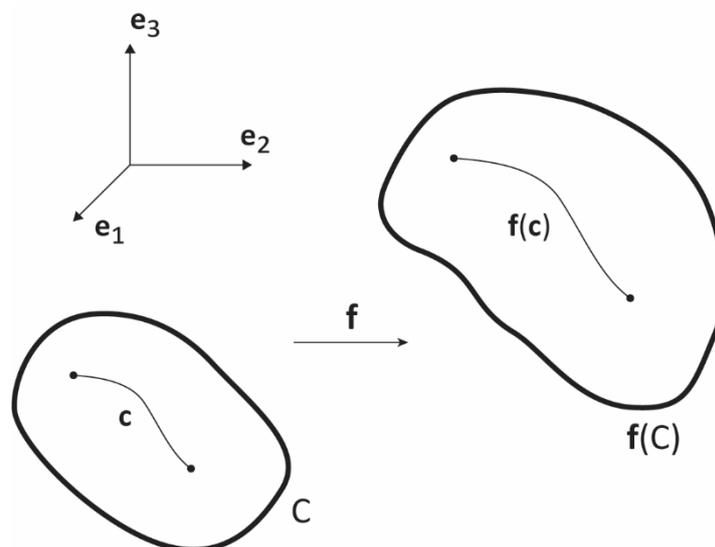


Figura 4-10 – Curvas nas regiões de referência e deformada.

O comprimento da curva é dado pela fórmula

$$\text{Comprimento } (\mathbf{c}) = \int_I ((dc_1 / dt)^2 + (dc_2 / dt)^2 + (dc_3 / dt)^2)^{1/2} dt \quad (4.37)$$

Em notação vetorial e indicial,

$$\text{Comprimento } (\mathbf{c}) = \int_I |\mathbf{dc} / dt| dt = \int_I (dc_i / dt dc_i / dt)^{1/2} dt$$

Na região $f(C)$, ocupada pelo corpo deformado, a curva é descrita pela função composta $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))$ e o comprimento da curva deformada é dado por

$$\text{Comprimento } (\mathbf{f}(\mathbf{c})) = \int_I |\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt| dt = \int_I (\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt \cdot \mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt)^{1/2} dt \quad (4.38)$$

Analisemos a função integranda. Pela regra da derivada da função composta,

$$\begin{aligned} \frac{df_1(c_1(t), c_2(t), c_3(t))}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \\ \frac{df_2(c_1(t), c_2(t), c_3(t))}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \\ \frac{df_3(c_1(t), c_2(t), c_3(t))}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \end{aligned}$$

e em notação vetorial e indicial

$$\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt = \mathbf{\nabla f} \mathbf{dc} / dt = \partial f_k / \partial a_i dc_i / dt.$$

O produto interno $\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt \cdot \mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt$ escreve-se, por extenso,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{df}(\mathbf{c})}{dt} \cdot \frac{\mathbf{df}(\mathbf{c})}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) \left(\frac{\partial f_3}{\partial a_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \frac{dc_3}{dt} \right) \end{aligned}$$

Em notação vetorial e indicial

$$\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt \cdot \mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt = (\mathbf{dc} / dt)^T \mathbf{\nabla f}^T \mathbf{\nabla f} \mathbf{dc} / dt = \partial f_k / \partial a_i dc_i / dt \partial f_k / \partial a_j dc_j / dt$$

Sendo o tensor das deformações $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{\nabla f}^T \mathbf{\nabla f}$, a expressão do comprimento da curva na posição deformada escreve-se

$$\begin{aligned} \text{Comprimento } (\mathbf{f}(\mathbf{c})) &= \int_I (\mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt \cdot \mathbf{df}(\mathbf{c}) / dt)^{1/2} dt = \int_I ((\mathbf{dc} / dt)^T \mathbf{\nabla f}^T \mathbf{\nabla f} \mathbf{dc} / dt)^{1/2} dt = \int_I ((\mathbf{dc} / dt)^T \mathbf{C} \mathbf{dc} / dt)^{1/2} dt \\ &= \int_I (C_{ij} dc_i / dt dc_j / dt)^{1/2} dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

O tensor \mathbf{C} é portanto utilizado para o cálculo do comprimento de linhas no corpo deformado.

4.6.1 Exemplo

Consideremos o caso em que a curva \mathbf{c} definida na região de referência do corpo C é uma hélice cilíndrica de raio R e passo $2\pi K$, dada pelas equações

$$a_1 = R \cos(t), \quad a_2 = R \sin(t), \quad a_3 = K t, \quad t \in [0, \theta]. \quad (4.40)$$

A fórmula (4.37) permite calcular o seu comprimento:

$$\text{Comprimento } (\mathbf{c}) = \int_0^\theta \sqrt{(R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t) + K^2)} dt = \theta \sqrt{R^2 + K^2}.$$

O corpo C sofre uma deformação homogénea dada por

$$x_1 = \lambda a_1, \quad x_2 = \lambda a_2, \quad x_3 = \lambda a_3,$$

que é, com $\lambda > 1$, uma extensão uniforme nas três direções com $C_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$. Depois da deformação a hélice permanece uma hélice, com perímetro calculado por (4.39):

$$\text{Comprimento } (\mathbf{f}(\mathbf{c})) = \int_0^\theta \sqrt{(\lambda^2 R^2 \sin^2(t) + \lambda^2 R^2 \cos^2(t) + \lambda^2 K^2)} dt = \lambda \theta \sqrt{R^2 + K^2}.$$

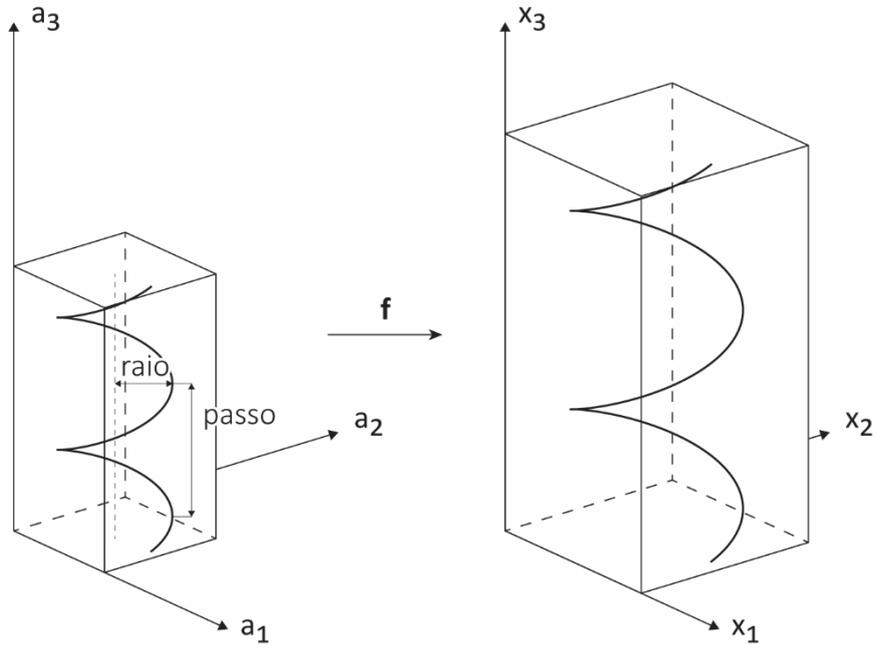


Figura 4-11 – Hélice nas regiões de referência e deformada.

4.6.2 Exemplo

No exemplo seguinte pretende-se determinar o comprimento final de uma geratriz do cilindro de raio a e comprimento L sujeito à deformação de torsão pura (4.33). Designando por \mathbf{g} a geratriz dada pelas equações

$$a_1 = a, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = a_3, \quad a_3 \in [0, L].$$

$$\text{Comprimento } (\mathbf{g}) = \int_0^L \sqrt{(0 + 0 + 1)} da_3 = L.$$

O comprimento final da geratriz é dado por

$$\text{Comprimento } (\mathbf{f}(\mathbf{g})) = \int_0^L \sqrt{\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a\alpha \\ 0 & a\alpha & a^2\alpha^2 + 1 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} da_3 = L \sqrt{a^2\alpha^2 + 1}.$$

4.7 Deformações rígidas e tensor das deformações \mathbf{C}

O tensor \mathbf{C} permite caracterizar a deformação de um corpo pois reconhece se estamos perante uma deformação rígida. Uma deformação rígida preserva distâncias, isto é, \mathbf{f} é rígida se para quaisquer dois pontos \mathbf{a} e \mathbf{b} do corpo,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|. \tag{4.41}$$

Mostra-se que a deformação de um corpo é rígida se verificar qualquer das condições equivalentes seguintes:

- i) \mathbf{f} é rígida.
- ii) \mathbf{f} pode ser representada na forma (4.42)

$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{t} + \mathbf{R} \mathbf{a}$ em que \mathbf{t} é um vetor que representa a translação do corpo e \mathbf{R} um tensor rotação ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ e $\det \mathbf{R} = +1$), que representa a rotação do corpo em torno da origem, ambos constantes.

iii) $\mathbf{C}(\mathbf{a}) = \mathbf{I}$ em todos os pontos do corpo. (4.43)

iv) Para qualquer curva \mathbf{c} definida no corpo, comprimento (\mathbf{c}) = comprimento ($\mathbf{f}(\mathbf{c})$). (4.44)

Portanto, se $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ em todos os pontos do corpo, a deformação correspondente é rígida.

4.7.1 Exemplo

Como exemplo consideremos a deformação definida em (4.5), representada na Figura 4-2,

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em que \mathbf{R} é um tensor rotação ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ e $\det \mathbf{R} = +1$). Neste caso $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Trata-se, por iii), de uma deformação rígida.

Consideremos também a deformação definida em coordenadas cilíndricas em (4.33), mas agora fazendo a rotação de cada secção igual à rotação da secção a meio do veio e portanto independente de Z , ver Figura 4-2:

$$r = R, \quad \theta = \Theta + \alpha L/2, \quad z = Z.$$

Em coordenadas cartesianas a deformação é dada por

$$x_1 = a_1 \cos \beta - a_2 \text{sen } \beta, \quad \beta = \alpha L/2$$

$$x_2 = a_1 \text{sen } \beta + a_2 \cos \beta$$

$$x_3 = a_3$$

O gradiente da deformação \mathbf{F} e o tensor das deformações \mathbf{C} são agora

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tratando-se portanto de uma deformação rígida.

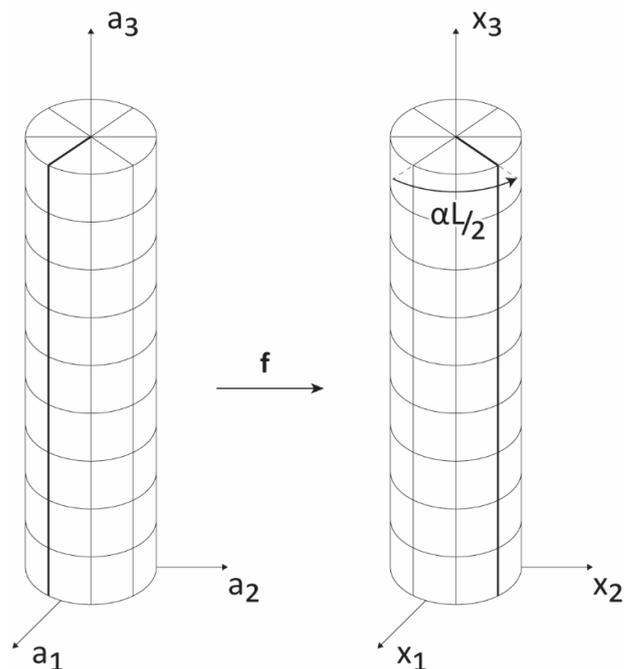


Figura 4-12 - Deformação rígida – rotação em torno de a_3

Os exemplos mostram também porque razão o gradiente da deformação \mathbf{F} não é uma medida adequada de deformação, embora caracterize completamente a deformação na vizinhança de um ponto do corpo: quando na deformação rígida θ varia, \mathbf{F} varia igualmente enquanto que \mathbf{C} se mantém igual ao tensor identidade \mathbf{I} .

4.8 Conceito elementar de deformação e ordem de grandeza em estruturas comuns em Engenharia

O conceito elementar de deformação é conhecido e quantifica, independentemente do seu comprimento ou forma geométrica, o alongamento (ou compressão) de um corpo.

Considere uma barra com comprimento inicial L que aumentou o comprimento de ℓ . A sua deformação média é dada por

$$\epsilon = \text{variação de comprimento da barra} / \text{comprimento inicial} = \ell / L.$$

A deformação de estruturas utilizadas em engenharia é em geral mais complexa que a situação anterior e é necessário definir, como estamos a fazer neste capítulo, um método geral de analisar deformações. Antes de relacionar as novas medidas de deformação com o conceito elementar e notando que ϵ é uma grandeza adimensional, vamos estabelecer, através de um exemplo, a sua ordem de grandeza em estruturas típicas de engenharia.

Analisemos uma estrutura relativamente flexível, cuja deformação se vê a olho nu, a asa de um avião. Tomemos como exemplo o Airbus A380 (Figura 4-14), cuja asa tem um comprimento de aproximadamente 40 m (a envergadura do A380 é 80 m), espessura média de $t=0.5$ m e altura ao solo de 6 m, ver Figura 4-13.

Devido ao seu peso próprio a asa deforma-se: as fibras da parte superior da asa alongam e as inferiores encurtam. Admitindo que a asa se deforma com uma curvatura constante até tocar no solo, as equações a resolver para determinar o raio R da circunferência descrita pela fibra média da asa são:

$$R(1 - \cos \theta) = 6 \text{ m}, \quad R\theta = 40 \text{ m}, \quad \text{com o resultado } \theta \approx 0.3 \text{ rad } (\approx 17^\circ) \text{ e } R \approx 130 \text{ m}.$$

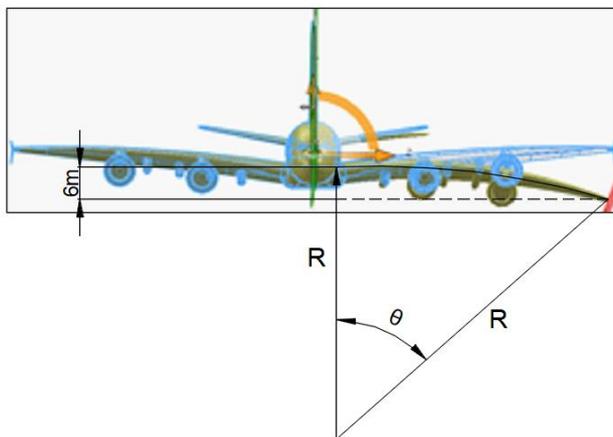


Figura 4-13 – Deformação da asa de um A 380

A deformação máxima ocorre nas fibras superiores da asa, cujo comprimento inicial é $L = R\theta$ e que aumentam o seu comprimento de $\ell = (t/2 + R)\theta - R\theta$. A sua deformação é $\epsilon = (t/2)/R = 0.25 \text{ m} / 130 \text{ m} \approx 0.002$.



Figura 4-14 Modelo A380, disponível em <https://grabcad.com/library/a380-qantas-1>

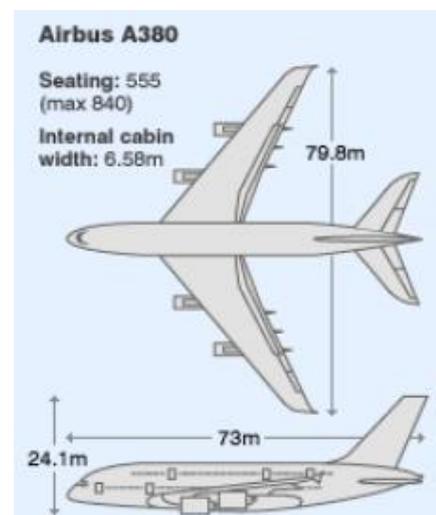


Figura 4-15 - Dimensões exteriores do Airbus A380

As deformações em estruturas de engenharia são em geral bastante pequenas e exprimem-se em percentagens (0.002=0.2%) para diminuir confusões com casas decimais. Note-se que um grande deslocamento (de 6 m na extremidade da asa) corresponde a uma pequena deformação (0.2%).

O valor de deformação encontrado é típico de estruturas de engenharia onde se utilizam materiais tais como metais, cerâmicas ou madeira. Embora as forças aplicadas possam ser elevadas, as deformações raramente ultrapassam 1%. Aliás, se numa estrutura comum as deformações fossem superiores, os materiais de que são fabricadas poderiam quebrar ou ficar com deformações permanentes.

Com base nos valores (pequenos) típicos da deformação em estruturas de engenharia, introduzem-se simplificações no tensor \mathbf{C} (cujas componentes são, tal como ϵ , adimensionais), definindo-se tensores de deformação aproximados conhecidos por tensores das deformações infinitesimais.

4.9 Tensor das deformações \mathbf{E} e tensores das deformações infinitesimais ϵ e ϵ

Partindo da definição de deslocamento, escrevemos

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{a}),$$

ficando o tensor \mathbf{C} a ser dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}. \quad (4.45)$$

Introduzimos o tensor das deformações \mathbf{E} definido por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}), \quad (4.46)$$

que se anula se a deformação do corpo for rígida. Em notação indicial,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial a_j + \partial u_j / \partial a_i + \partial u_k / \partial a_i \partial u_k / \partial a_j).$$

Outro tensor que agora introduzimos é o tensor ϵ definido por

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4.47)$$

denominado tensor das deformações infinitesimais. Em notação indicial e por extenso temos

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial a_j + \partial u_j / \partial a_i),$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial a_1 & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_1}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_1}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2}) & \partial u_2 / \partial a_2 & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_2}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_3}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_3}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_3}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3}) & \partial u_3 / \partial a_3 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que, em comparação com o tensor \mathbf{E} , faltam os termos com quadrados e produtos dos componentes do gradiente do deslocamento e que as componentes dependem linearmente das derivadas dos deslocamentos.

O tensor das deformações infinitesimais não é uma medida exacta de deformação mas, se todos os componentes do gradiente do deslocamento forem pequenos, isto é, se $|\partial u_i / \partial a_j| \ll 1$, é uma boa aproximação: se ϵ_{ij} é da ordem de 0.001 ou inferior, a aproximação despreza este valor em comparação com a unidade.

Uma consequência do gradiente do deslocamento ser pequeno é que é indiferente calcular as derivadas dos deslocamentos relativamente às coordenadas iniciais \mathbf{a} dos pontos do corpo ou às coordenadas finais \mathbf{x} , pois, para a mesma ordem de aproximação, $\partial u_i / \partial a_j \approx \partial u_i / \partial x_j$.

Considere-se então outro tensor, $\mathbf{e} = e_{ij}$, igualmente denominado tensor das deformações infinitesimais, definido por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

Por extenso,

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \partial u_2 / \partial x_2 & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & \partial u_3 / \partial x_3 \end{bmatrix},$$

e em notação direta,

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T). \tag{4.48}$$

Em conclusão verifica-se que, para a mesma ordem de aproximação,

$$e_{ij} \approx \epsilon_{ij} \approx E_{ij}. \tag{4.49}$$

A vantagem dos tensores das deformações infinitesimais é que, sendo lineares nos componentes do deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{a})$, permitem que as teorias que os utilizam sejam teorias lineares, que aplicam técnicas de análise linear na resolução de problemas, menos complexas que as técnicas não lineares.

4.10 Tensor das deformações infinitesimais: interpretação geométrica

Considere o segmento que liga o ponto \mathbf{a} de coordenadas (a_1, a_2, a_3) ao ponto de coordenadas $(a_1 + \delta\ell, a_2, a_3)$ (Figura 4-16). Este segmento é paralelo ao eixo a_1 e tem de comprimento $\delta\ell$. Depois da deformação os pontos \mathbf{a} e $\mathbf{a} + \delta\ell \mathbf{e}_1$ movem-se para as suas posições deformadas, sendo os vetores deslocamento de ambos os pontos

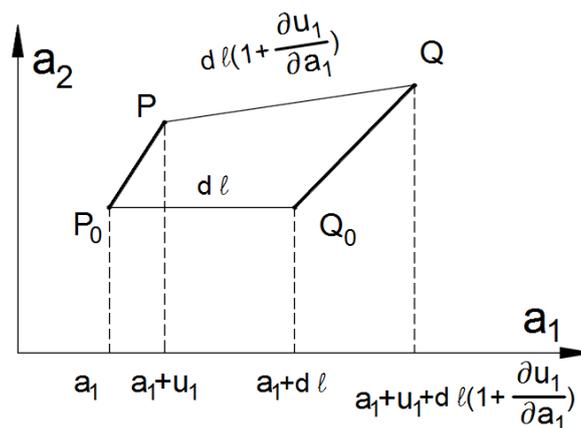


Figura 4-16– Deformações normais ou extensões.

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}) = (u_1(a_1, a_2, a_3), u_2(a_1, a_2, a_3), u_3(a_1, a_2, a_3)) \quad \mathbf{e}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{a} + \delta\ell \mathbf{e}_1) = (u_1(a_1 + \delta\ell, a_2, a_3), u_2(a_1 + \delta\ell, a_2, a_3), u_3(a_1 + \delta\ell, a_2, a_3)).$$

Na hipótese dos componentes do gradiente do deslocamento serem pequenos, isto é, se $|\partial u_i / \partial a_j| \ll 1$, o comprimento do segmento na posição deformada é aproximadamente igual ao comprimento da sua projeção na direção a_1 . Note-se que as derivadas $\partial u_2 / \partial a_1$ e $\partial u_3 / \partial a_1$ em (a_1, a_2, a_3) , pequenas por hipótese, dão a rotação do segmento que estamos a considerar.

A diferença dos deslocamentos das extremidades do segmento dá a variação de comprimento do segmento e, a menos de um erro de ordem superior à primeira,

$$u_1(a_1, a_2, a_3) - u_1(a_1 + \delta l, a_2, a_3) \approx \partial u_1 / \partial a_1 \delta l = \epsilon_{11} \delta l.$$

Portanto ϵ_{11} dá aproximadamente a variação de comprimento por unidade de comprimento de um segmento inicialmente orientado na direção a_1 . Para ϵ_{22} e ϵ_{33} a interpretação é semelhante nas direções iniciais correspondentes. Estes componentes do tensor das deformações infinitesimais com índices iguais também se chamam deformações normais ou extensões e generalizam o conceito de deformação lembrado na secção 4.14 ao caso de deformação pontual.

Para interpretar os termos fora da diagonal da matriz do tensor das pequenas deformações, consideremos dois segmentos, um orientado na direção a_1 e comprimento δl_1 e outro na direção a_2 e comprimento δl_2 (Figura 4-17).

Depois da deformação o segmento paralelo a a_1 perde o paralelismo se $\partial u_2 / \partial a_1 \approx \theta_1 \neq 0$ e, da mesma forma, a mudança θ_2 da direção do segmento paralelo a a_2 é dada aproximadamente por $\partial u_1 / \partial a_2$.

A componente $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 1/2(\partial u_1 / \partial a_2 + \partial u_2 / \partial a_1)$ dá metade da variação do ângulo de dois segmentos inicialmente orientados nas direções de a_1 e a_2 . Com ϵ_{13} e ϵ_{23} a interpretação é semelhante. A estas componentes chamam-se deformações de corte ou distorções.

Para as diferentes componentes (normais e de corte) formarem um tensor é necessário afetar as componentes de corte do fator $1/2$.

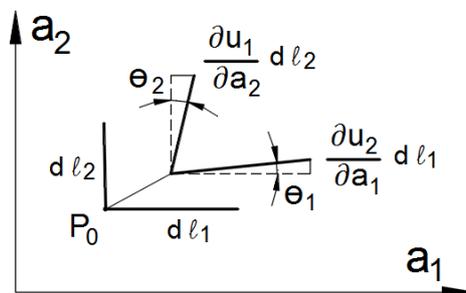


Figura 4-17 – Deformações de corte ou distorções.

Para determinar a extensão direta numa direção dada pelo vetor unitário $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, calcula-se

$$\epsilon_n = (\mathbf{n})^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}, \quad \epsilon_n = \epsilon_{ij} n_i n_j. \quad (4.50)$$

Para determinar a distorção (metade da variação do ângulo) entre duas direções perpendiculares entre si, dadas pelos vetores unitários \mathbf{n}^1 e \mathbf{n}^2 , calcula-se

$$\epsilon^{12} = (\mathbf{n}^1)^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}^2, \quad \epsilon^{12} = \epsilon_{ij} n_i^1 n_j^2. \quad (4.51)$$

Estas duas fórmulas têm origem nas leis de transformação dos tensores de segunda ordem por rotação do referencial. Para o tensor das deformações infinitesimais e_{ij} as expressões são semelhantes.

Em conclusão, os tensores de deformação infinitesimal generalizam o conceito elementar de deformação lembrado na secção 4.8, permitindo analisar o estado de deformação num ponto em corpos com geometria complexa sujeitos a deformações infinitesimais não homogéneas.

4.10.1 Exemplo

A deformação designada torção pura (4.33) tem o campo de deslocamentos dado por

$$u_1(a_1, a_2, a_3) = a_1 (\cos \beta - 1) - a_2 \sin \beta, \quad \beta = \alpha a_3$$

$$u_2(a_1, a_2, a_3) = a_1 \sin \beta + a_2 (\cos \beta - 1)$$

$$u_3(a_1, a_2, a_3) = 0,$$

em que α representa o ângulo de torção por unidade de comprimento do cilindro. O tensor de deformação \mathbf{E} é dado por

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_2 \alpha \\ 0 & 0 & a_1 \alpha \\ -a_2 \alpha & a_1 \alpha & (a_1^2 + a_2^2) \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Para pequenos ângulos de torção por unidade de comprimento α ,

$$u_1(a_1, a_2, a_3) \approx -\alpha a_2 a_3$$

$$u_2(a_1, a_2, a_3) \approx \alpha a_1 a_3,$$

o tensor das deformações infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}$ vem dado por

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_2 \alpha \\ 0 & 0 & a_1 \alpha \\ -a_2 \alpha & a_1 \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

e é aproximadamente igual a \mathbf{E} . Na Figura 4-18 está representada uma deformação de torção pura para α pequeno.

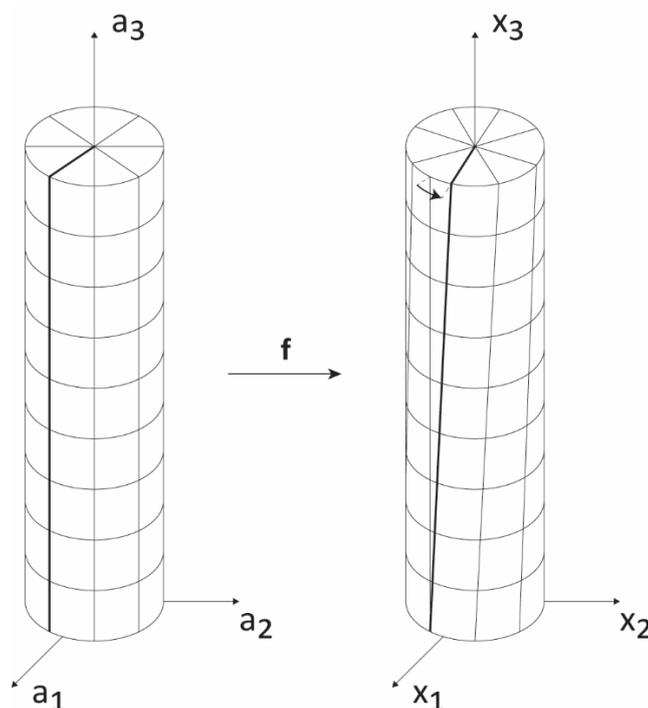


Figura 4-18 – Deformação infinitesimal de torção pura

4.11 Deslocamentos infinitesimais rígidos

Consideremos uma deformação em que o gradiente do deslocamento é pequeno, $|\partial u_i / \partial a_j| \ll 1$. Quando a deformação é rígida, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, $\mathbf{E} \approx \mathbf{e} \approx \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ e, por (4.47),

$$\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T = \mathbf{0} \text{ e } \nabla \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{u}^T. \quad (4.52)$$

O gradiente do deslocamento de um deslocamento infinitesimal rígido é, portanto, antissimétrico.

Mostra-se que um deslocamento infinitesimal rígido verifica qualquer das condições equivalentes seguintes:

i) \mathbf{u} tem a forma $\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \mathbf{t} + \mathbf{W} \mathbf{a}$ em que \mathbf{W} é um tensor antissimétrico e \mathbf{t} uma translação. (4.53)

ii) $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{a})$ é constante e antissimétrico em cada ponto \mathbf{a} do corpo. (4.54)

iii) $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ em cada ponto \mathbf{a} do corpo. (4.55)

As condições anteriores mostram que $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{W}$ e utilizando a relação entre tensores antissimétricos e vetores duais, pode-se escrever o campo de deslocamentos na forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \mathbf{t} + \mathbf{w} \times \mathbf{a}. \quad (4.56)$$

em que \mathbf{w} é o vetor associado ao tensor antissimétrico \mathbf{W} .

4.11.1 Exemplo

Como exemplo, considere a deformação rígida (rotação em torno de a_3) não necessariamente infinitesimal, representada na Figura 4-2.

$$x_1 = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta,$$

$$x_2 = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta,$$

$$x_3 = a_3,$$

ou, em notação tensorial,

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Para esta deformação $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, e $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Mas os tensores \mathbf{e} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ não são nulos nem permanecem constantes durante esta deformação pois

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

confirmando que estes tensores não podem ser uma medida exata de deformação. No entanto as componentes de \mathbf{e} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são quantidades de segunda ordem no ângulo θ que podem ser desprezadas para pequenas rotações. O tensor \mathbf{W} para pequenas rotações é dado por

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.12 Volume do corpo na região deformada

O volume do corpo C depois da deformação \mathbf{f} , com gradiente de deformação \mathbf{F} , é dado por

$$\text{Vol}(\mathbf{f}(C)) = \int_{\mathbf{f}(C)} dV_x = \int_C \det \nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) dV_a = \int_C \det \mathbf{F}(\mathbf{a}) dV_a. \quad (4.57)$$

Na fórmula anterior, que não é senão a fórmula para mudança de variáveis em integrais múltiplos, dV_x e dV_a são os elementos de volume nas regiões deformada e de referencia. Localmente teremos

$$dV_x / dV_a = \det \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

Se a deformação \mathbf{f} for isocórica,

$$\text{Vol}(\mathbf{f}(C)) = \text{Vol}(C) \text{ e } \det \mathbf{F} = 1. \quad (4.58)$$

As deformações homogêneas de corte simples e corte puro são deformações isocóricas. A deformação não homogênea de torção pura é igualmente uma deformação isocórica.

Quando os componentes do gradiente do deslocamento são pequenos, isto é quando $|\partial u_i / \partial a_j| \ll 1$,

$$\det \mathbf{F} \approx 1 + \partial u_i / \partial a_i = 1 + \epsilon_{ii}. \quad (4.59)$$

A quantidade ϵ_{ii} é o traço do tensor das deformações infinitesimais $\boldsymbol{\epsilon}$ e mede, para deformações infinitesimais, a variação de volume por unidade de volume de um elemento de volume na vizinhança de um ponto.

4.13 Tensor das deformações infinitesimais em coordenadas cilíndricas

Em várias situações é vantajoso trabalhar em coordenadas curvilíneas. Nesta secção vamos estabelecer as expressões dos componentes do tensor das deformações infinitesimais em coordenadas cilíndricas, recorrendo diretamente à sua definição geométrica. Recordamos que os componentes de deformação normal, ou extensões, representam variações de comprimento de segmentos por unidade de comprimento, enquanto as componentes de corte, ou distorções, representam metade da variação de um ângulo reto.

Consideremos uma deformação que leva um ponto de coordenadas cilíndricas R, Θ, Z na região de referencia à posição final em coordenadas cilíndricas r, θ, z . O campo de deslocamentos é $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$.

O deslocamento na direção radial, u_r , vai dar origem a duas parcelas de deformação. Da Figura 4-19 temos que

$$e_{rr} = (u_r + (\partial u_r / \partial r)dr - u_r) / dr = \partial u_r / \partial r. \quad (4.60)$$

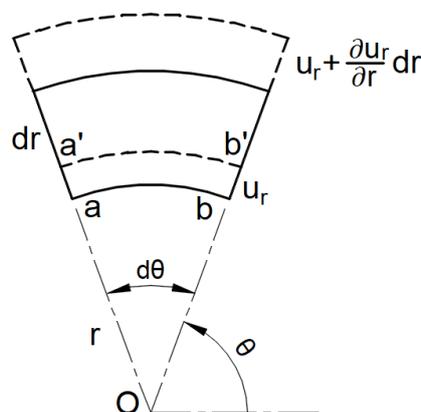


Figura 4-19 – Deformação radial, u_r .

Da mesma figura observa-se que um deslocamento radial de um elemento circunferencial causa um alongamento nesse elemento e, portanto, uma deformação na direção θ . O elemento ab , com comprimento inicial $r d\theta$ desloca-se para $a'b'$ ficando com comprimento $(r + u_r) d\theta$. A deformação tangencial devido a esse deslocamento radial é

$$e_{\theta\theta(1)} = ((r + u_r) d\theta - r d\theta) / r d\theta = u_r / r. \quad (4.61)$$

Na Figura 4-20 vê-se que o deslocamento tangencial u_θ dá origem a uma deformação direta tangencial igual a

$$e_{\theta\theta(2)} = (u_\theta + (\partial u_\theta / \partial \theta) d\theta - u_\theta) / r d\theta = \partial u_\theta / r \partial \theta. \quad (4.62)$$

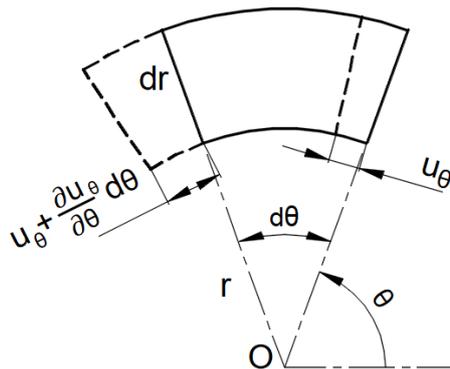


Figura 4-20 – Deformação tangencial, u_θ

A deformação $e_{\theta\theta}$ é a soma dessas duas parcelas,

$$e_{\theta\theta} = e_{\theta\theta(1)} + e_{\theta\theta(2)} = u_r / r + \partial u_\theta / r \partial \theta. \quad (4.63)$$

A deformação na direção axial é dada por, como no caso de coordenadas cartesianas,

$$e_{zz} = \partial u_z / \partial z. \quad (4.64)$$

A deformação de corte $e_{r\theta}$ é igual a metade do ângulo ($c'a'b' - c a b$) como se vê na Figura 4-21. Dela retiramos que

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} (\partial u_r / r \partial \theta + \partial u_\theta / \partial r - u_\theta / r). \quad (4.65)$$

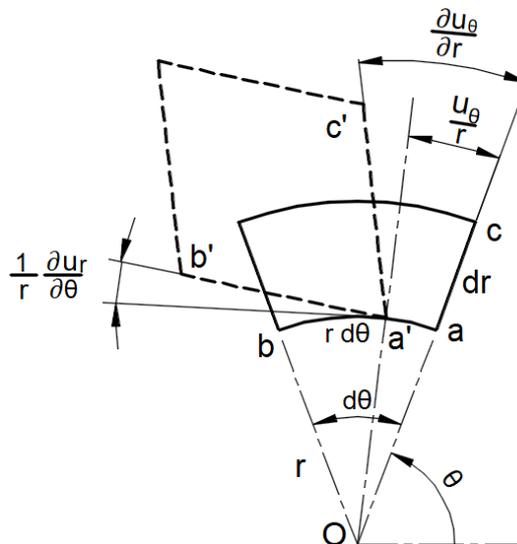


Figura 4-21 – Deformação de corte, $e_{r\theta}$

A primeira parcela vem da variação no deslocamento radial na direção θ ; a segunda da variação do deslocamento tangencial na direção radial; a última parcela vem da rotação do elemento como corpo rígido em torno da origem.

Os termos restantes e_{zr} e $e_{z\theta}$ são estabelecidos a partir da Figura 4-22 e da Figura 4-23.

$$e_{zr} = \frac{1}{2} (\partial u_r / \partial z dz / dz + \partial u_z / \partial r dr / dr) = \frac{1}{2} (\partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r) \quad (4.66)$$

$$e_{z\theta} = \frac{1}{2} (\partial u_z / \partial \theta d\theta / r d\theta + \partial u_\theta / \partial z dz / dz) = \frac{1}{2} (\partial u_z / r \partial \theta + \partial u_\theta / \partial z) \quad (4.67)$$

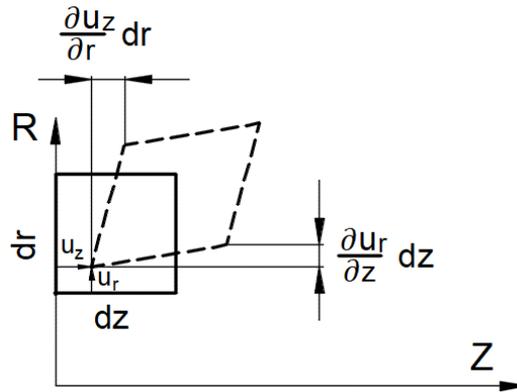


Figura 4-22 – Deformação de corte, ϵ_{zr}

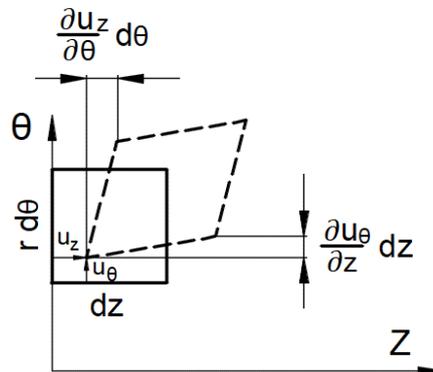


Figura 4-23 – Deformação de corte, $\epsilon_{z\theta}$

Por extenso, o tensor das deformações infinitesimais em coordenadas polares vem

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_r / \partial r & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}) & u_r / r + \partial u_\theta / r \partial \theta & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \theta}) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}) & \partial u_z / \partial z \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

4.13.1 Exemplo

Voltemos ao exemplo de deformação de torção pura (4.33), definida em coordenadas cilíndricas por

$$r = R, \quad \theta = \Theta + \alpha Z, \quad z = Z.$$

No caso de pequenos ângulos de torção por unidade de comprimento, $\alpha \ll 1$,

$$u_r = r - R = 0, \quad u_\theta \approx R (\theta - \Theta) = R \alpha Z, \quad u_z = z - Z = 0,$$

e o tensor das deformações infinitesimais $\boldsymbol{\varepsilon}$ vem

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} R \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} R \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

As únicas componentes não nulas são $\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} R \alpha$, valor que é metade do ângulo entre a posição deformada de uma linha na direção axial distante R do eixo do cilindro e a direção axial (variação do ângulo entre segmentos com direções axial e tangencial antes da deformação).

4.14 Alongamentos e deformações principais e direções principais

Voltemos à expressão (4.25) que nos dá, no ponto \mathbf{a} , a orientação final \mathbf{n}^x dum segmento elementar que sofre um alongamento λ e cuja direção inicial era \mathbf{n}^a :

$$\mathbf{n}^x = \lambda^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a.$$

O gradiente de deformação \mathbf{F} pode ser decomposto no produto $\mathbf{R} \mathbf{U}$ em que \mathbf{R} é uma rotação e \mathbf{U} um tensor simétrico e positivo definido. Qual a orientação de um segmento elementar devido a \mathbf{U} ? Da expressão anterior

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a = \lambda \mathbf{n}^x.$$

Se a orientação final do segmento for igual à inicial, $\mathbf{n}^a = \mathbf{n}^x$ e

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}) \mathbf{n}^a = \lambda \mathbf{n}^a \quad \text{ou} \quad (\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n}^a = \mathbf{0}. \quad (4.69)$$

Portanto, no caso em que a orientação final do segmento é igual à inicial, λ é um valor principal de \mathbf{U} e \mathbf{n}^a uma direção principal de \mathbf{U} . Como \mathbf{U} é simétrico e positivo definido os seus valores principais são reais e positivos e designados por alongamentos principais λ_1, λ_2 e λ_3 com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Igualmente existem três direções principais ortogonais entre si, $\mathbf{n}^{1a}, \mathbf{n}^{2a}$ e \mathbf{n}^{3a} , unicamente determinadas se os valores principais forem distintos, que são as direções principais de \mathbf{U} .

Se os eixos coordenados coincidirem com as direções principais de \mathbf{U} , a matriz dos componentes escreve-se

$$[U_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

e concluímos que a deformação $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$ consiste em três alongamentos (extensões) de grandeza λ_1, λ_2 e λ_3 segundo as direções $\mathbf{n}^{1a}, \mathbf{n}^{2a}$ e \mathbf{n}^{3a} , respetivamente, seguidas de uma rotação \mathbf{R} .

Se a deformação \mathbf{F} for homogénea, \mathbf{U} e \mathbf{R} são tensores constantes e os alongamentos e direções principais são uniformes no corpo. No caso geral de uma deformação não homogénea os alongamentos principais e as direções principais são função de posição, bem como o tensor \mathbf{R} .

Como o tensor das deformações de Cauchy Green $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ e $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$, as direções principais de \mathbf{C} e \mathbf{E} coincidem com as de \mathbf{U} e os valores próprios são λ_i^2 e $\frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1)$, $i = 1, 2, 3$, respetivamente.

Pode ser dada outra interpretação aos alongamentos principais e direções principais. Da fórmula para o cálculo dos alongamentos (4.31),

$$\lambda^2 = (\mathbf{n}^a)^T \mathbf{C} \mathbf{n}^a = C_{ij} n_i^a n_j^a,$$

podemos determinar as direções \mathbf{n}^a em que o alongamento nesse ponto é máximo ou mínimo, juntamente com a condição $n_i n_i = 1$. Mostra-se que esses valores extremos são dados pelas soluções do problema de valores próprios

$$(C_{ij} - \lambda^2 \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (4.71)$$

As direções \mathbf{n}^a para as quais λ^2 é extremo são duas das direções principais de \mathbf{C} e os valores correspondentes de λ^2 são os valores próprios máximo e mínimo de \mathbf{C} , designados por λ_1^2 e λ_3^2 .

Quando o gradiente do deslocamento é pequeno e se utilizam os tensores das deformações infinitesimais $e_{ij} \approx \varepsilon_{ij}$, o problema de valores próprios é dado por

$$(e_{ij} - e \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (4.72)$$

o que permite determinar as deformações principais e_1, e_2 e e_3 e direções principais. Essas deformações têm os valores máximos e mínimos do estado de deformação (infinitesimal) no ponto e , nas direções em que ocorrem, não há distorções.

Saliente-se que as deformações normais (ou extensões) dos tensores das deformações infinitesimais têm o significado e interpretação geométrica já referida: representam a variação de comprimento por unidade de comprimento de um segmento inicialmente orientado na direção principal correspondente. Por se tratar de uma direção principal, a orientação final desse segmento coincide com a sua direção inicial, pois a distorção é nula.

No caso plano, em que uma das deformações principais é nula, pode-se fazer a representação do estado de deformação no círculo de Mohr.

4.15 Exemplos de Deformação

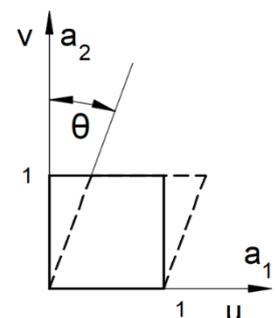
4.15.1 Exemplo 4.1 – Deformação de corte simples.

Uma deformação homogénea da forma (ver figura)

$$x_1 = a_1 + \gamma a_2, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad \gamma = \operatorname{tg} \theta,$$

é chamada deformação de corte simples. Para esta deformação calcule:

- As matrizes \mathbf{F} , \mathbf{C} e \mathbf{E} ;
- As normais às faces inclinadas de um cubo deformado.
- Os valores e direções principais de \mathbf{E} . Que relação pode estabelecer com a deformação do problema seguinte?



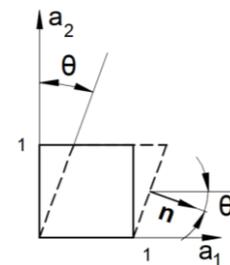
Resolução

$$a) \mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

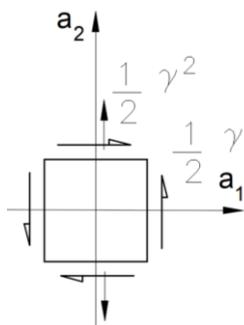
$$\text{Tensor das deformações } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) As normais às faces inclinadas têm como componentes:

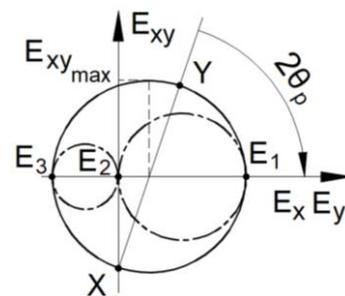
$$\mathbf{n} = (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$



c) Usando o círculo de Mohr para as deformações no plano "xy", sabendo que a direção "z" é direção principal:



$$X(0, -1/2 \gamma) \quad Y(1/2 \gamma^2, +1/2 \gamma)$$

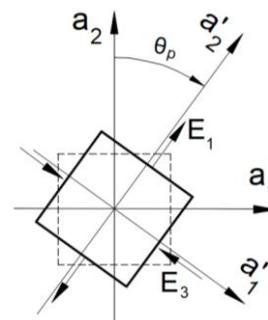


Obtemos

$$C = \frac{1}{4} \gamma^2 \quad R = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \gamma^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8} \gamma^4 + \frac{1}{4} \gamma^2} = \sqrt{\frac{\gamma^4 + 2\gamma^2}{8}} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2 + 2}{2}}$$

$$E_1 = C + R = \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2 + 2}{2}} \quad E_2 = 0 \quad E_3 = C - R = \frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2 + 2}{2}}$$

$$\tan(2\theta_p) = \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{4} \gamma^2} = \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\frac{1}{4} \gamma^2} = \frac{2}{\gamma} \quad \theta_p = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2}{\gamma}\right)$$



Note-se que se usarmos grandes extensões não estamos num caso de corte puro ($E_{11}=0$, $E_{22} \neq 0$, e portanto a extensão normal média não é nula).

Contudo, se considerarmos deformações infinitesimais (γ "pequeno"), então o termo $E_{22}=1/2 \gamma^2$ é desprezável (por ser de ordem superior) e temos uma deformação de corte puro.

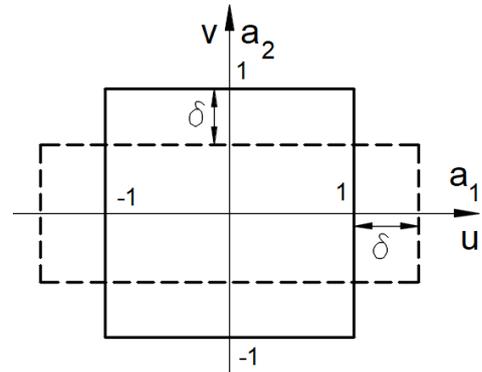
4.15.2 Exemplo 4.2 – Deformação de corte.

Uma deformação homogênea da forma

$$x_1 = (1 + \delta) a_1, \quad x_2 = (1 - \delta) a_2, \quad x_3 = a_3, \quad \delta > 0,$$

é uma deformação de corte simples. Para esta deformação calcule:

- As matrizes \mathbf{F} , \mathbf{C} e \mathbf{E} ;
- O tensor das deformações infinitesimais $\boldsymbol{\epsilon}$;
- Calcule a razão de volumes antes e depois da deformação.
- Represente este estado de deformação no círculo de Mohr.



Resolução

$$a) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \delta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor das deformações

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} (1 + \delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \delta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta^2 + 2\delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 - 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta(\delta + 2) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(\delta - 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u \equiv u_1 = x_1 - a_1 = (\delta) a_1$$

b) deslocamentos: $v \equiv u_2 = x_2 - a_2 = (-\delta) a_2$

$$w \equiv u_3 = x_3 - a_3 = 0$$

Tensor das deformações infinitesimais

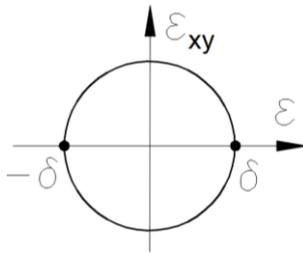
$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\delta & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) A razão entre o volume final (V) e o volume inicial (V₀) é dada por

$$\frac{V}{V_0} = \det \mathbf{F} = (1 + \delta) \times (1 - \delta) = 1 - \delta^2 .$$

Conclui-se assim que esta deformação não é a volume constante. Se a deformação for infinitesimal, $\delta \ll 1$ e pode-se utilizar a fórmula $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = (V - V_0) / V_0$ para determinar a variação de volume por unidade de volume, que, nestas condições é nula.

d) O círculo de Mohr desta deformação é



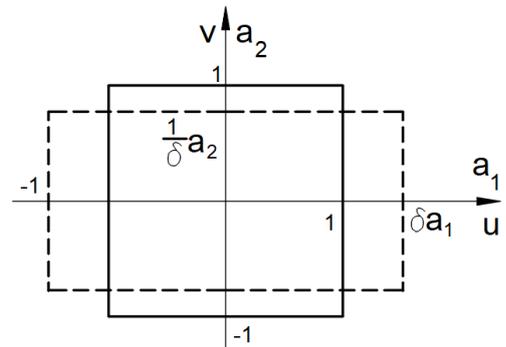
4.15.3 Exemplo 4.3 – Deformação de corte puro.

Uma deformação homogênea da forma

$$x_1 = \delta a_1, \quad x_2 = 1/\delta a_2, \quad x_3 = a_3, \quad \delta > 1,$$

é chamada deformação de corte puro. Para esta deformação calcule:

- As matrizes **F**, **C** e **E**;
- Desenhe o cubo unitário $-1 < a_1 < 1, -1 < a_2 < 1, -1 < a_3 < 1$, na posição deformada.
- Por que razão se chama a esta deformação de corte puro?
- Calcule a razão de volumes antes e depois da deformação



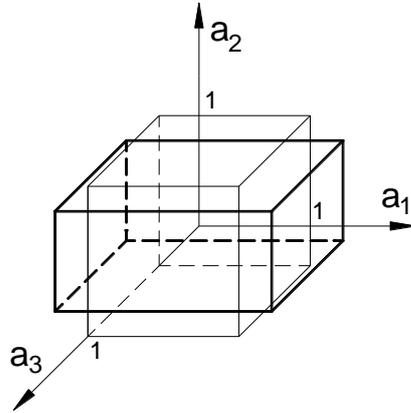
Resolução

$$\text{a) } \mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tensor das deformações } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)



$$u \equiv u_1 = x_1 - a_1 = (\delta - 1)a_1$$

c) deslocamentos:

$$v \equiv u_2 = x_2 - a_2 = \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)a_2$$

$$w \equiv u_3 = x_3 - a_3 = 0$$

Tensor das deformações infinitesimais

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(\delta - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomem-se como exemplos

$$\delta = 1.1: \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{1.1} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

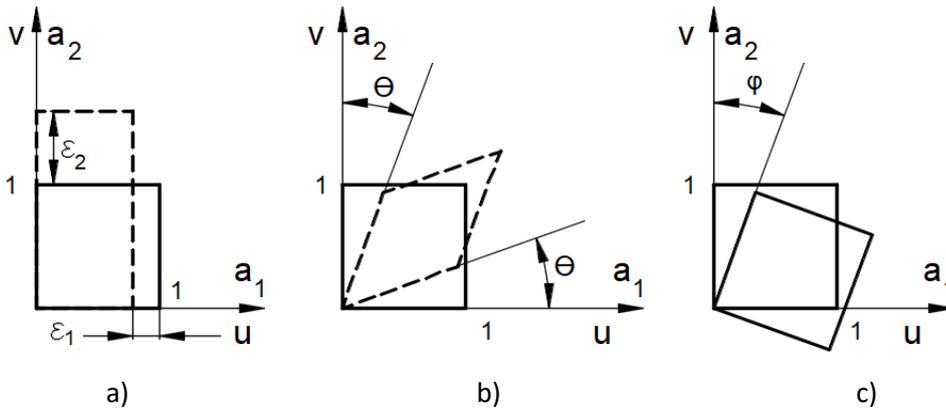
$$\delta = 1.01: \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{1.01} - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

daqui se conclui que, em pequenas deformações, se trata de corte puro, basta fazer o círculo de Mohr (ver o problema anterior) para o verificar.

d) A razão de volumes é dada por $\frac{V}{V_0} = \det \mathbf{F} = \delta \times \frac{1}{\delta} \times 1 = 1$. Esta deformação é a volume constante.

4.15.4 Exemplo 4.4 - Campo de deslocamentos

- a) Obtenha os deslocamentos e as deformações para os casos a), b) e c)
 b) Obtenhas as deformações quando $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta, \varphi$ são quantidades infinitesimais.



Resolução

a)

caso a)

posições finais:

$$x_1 = (1 - \varepsilon_1) a_1$$

$$x_2 = (1 + \varepsilon_2) a_2$$

deslocamentos:

$$u \equiv u_1 = x_1 - a_1 = -\varepsilon_1 a_1$$

$$v \equiv u_2 = x_2 - a_2 = +\varepsilon_2 a_2$$

Deformações

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \Leftrightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$E_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) \Leftrightarrow E_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_1} \right)$$

$$E_{xx} = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 - \varepsilon_1 + (-\varepsilon_1)^2 + 0 \right) = -\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2$$

$$E_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \right) \Leftrightarrow E_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial u}{\partial a_2} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right)$$

$$E_{yy} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_2 + 0 + (\varepsilon_2)^2 \right) = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \right) \Leftrightarrow E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right)$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} (0 + 0 + (-\varepsilon_1) \times 0 + \varepsilon_2 + 0 \times (\varepsilon_2)) = 0$$

Caso b)

Sugestão para obter as posições deformadas: analisar os pontos iniciais (0,0), (1,0), (0,1) e verificar as suas posições finais.

$$\begin{aligned}x_1 &= (\cos\theta)a_1 + (\sin\theta)a_2 \\x_2 &= (\sin\theta)a_1 + (\cos\theta)a_2\end{aligned}$$

deslocamentos:

$$\begin{aligned}u &\equiv u_1 = (\cos\theta - 1)a_1 + (\sin\theta)a_2 \\v &\equiv u_2 = (\sin\theta)a_1 + (\cos\theta - 1)a_2\end{aligned}$$

Deformações:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \Leftrightarrow \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$E_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_1} \right) = (\cos\theta - 1) + \frac{1}{2} [(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta] = 0$$

$$E_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial u}{\partial a_2} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right) = (\cos\theta - 1) + \frac{1}{2} [\sin^2\theta + (\cos\theta - 1)^2] = 0$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right) = \frac{1}{2} (\sin\theta + \sin\theta + (\cos\theta - 1)\sin\theta + \sin\theta(\cos\theta - 1)) = \cos\theta \sin\theta$$

Caso c)

Posições deformadas:

$$\begin{aligned}x_1 &= (\cos\varphi)a_1 + (\sin\varphi)a_2 \\x_2 &= (-\sin\varphi)a_1 + (\cos\varphi)a_2\end{aligned}$$

deslocamentos:

$$\begin{aligned}u &= (\cos\varphi - 1)a_1 + (\sin\varphi)a_2 \\v &= (-\sin\varphi)a_1 + (\cos\varphi - 1)a_2\end{aligned}$$

Deformações:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \Leftrightarrow \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$E_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_1} \right) = (\cos\varphi - 1) + \frac{1}{2} [(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi] = 0$$

$$E_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial u}{\partial a_2} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_2} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right) = (\cos\varphi - 1) + \frac{1}{2} [\sin^2\varphi + (\cos\varphi - 1)^2] = 0$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial a_1} \frac{\partial u}{\partial a_2} + \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{\partial v}{\partial a_2} \right) = \frac{1}{2} (\sin\varphi - \sin\varphi + (\cos\varphi - 1)\sin\varphi - \sin\varphi(\cos\varphi - 1)) = 0$$

b) Quando as quantidades são pequenas: $\sin\theta \approx \theta$ $\cos\theta \approx 1$ $\varepsilon^2 \approx 0$

Caso a)

$$\begin{aligned} E_{xx} &= -\varepsilon_1 \\ E_{yy} &= \varepsilon_2 \\ E_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Caso b)

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 0 \\ E_{yy} &= 0 \\ E_{xy} &= \theta \end{aligned}$$

Caso c)

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 0 \\ E_{yy} &= 0 \\ E_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

4.15.5 Exemplo 4.5 - Deslocamentos e deformações

Uma deformação é dada por $\mathbf{x} = (a_1 + \gamma a_2)\mathbf{e}_1 + (a_2 + \gamma a_1)\mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$

- Obter o campo de deslocamentos
- Obter \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{E} e $\boldsymbol{\varepsilon}$. Fazer $\gamma=2$ e $\gamma=10^{-3}$ e comparar \mathbf{E} e $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- A deformação é homogênea? É rígida? É fisicamente possível? Justifique as respostas.
- Obter os valores e vetores próprios de \mathbf{F} .
- Representar \mathbf{C} e \mathbf{E} no referencial principal de \mathbf{F} .
- Considere um quadrado unitário. Calcular a variação de comprimento da diagonal do quadrado.
- A variação de ângulo entre dois lados do quadrado.

Resolução

a) Deslocamentos: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$

$$u_1 = a_1 + \gamma a_2 - a_1 = \gamma a_2 \quad u_2 = a_2 + \gamma a_1 - a_2 = \gamma a_1 \quad u_3 = a_3 - a_3 = 0 \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \gamma a_2 \\ \gamma a_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Gradiente da deformação

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tensor das deformações } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma^2 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tensor das deformações infinitesimais } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para

$$\gamma = 2 \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 10^{-3} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2 \times 10^{-3} & 0 \\ 2 \times 10^{-3} & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \times 10^{-3} & 0 \\ 2 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) A deformação é homogénea pois \mathbf{F} é constante

A deformação é rígida se $\mathbf{E}=\mathbf{0} \Rightarrow$ esta deformação não é rígida

A deformação é fisicamente possível se $\det \mathbf{F} > 0$:

$$\det \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \gamma^2 \quad 1 - \gamma^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \gamma < 1$$

d) Valores próprios de \mathbf{E}

$$|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & \gamma & 0 \\ \gamma & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^3 - \gamma^2(1-\lambda) = 0$$

$$1 - \lambda = 0 \vee (1 - \lambda)^2 - \gamma^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \vee \quad (1 - \lambda) = \pm \gamma \Leftrightarrow \lambda = 1 + \gamma \vee \lambda = 1 - \gamma$$

Admitindo $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \gamma \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 1 - \gamma \end{aligned}$$

Vetores próprios:

para $\lambda_1 = 1 + \gamma$

$$[\mathbf{F} - \lambda_1 \mathbf{I}] \{ \mathbf{n} \} = \{ \mathbf{0} \} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - (1 + \gamma) & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 - (1 + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (1 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \{ \mathbf{0} \} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma & \gamma & 0 \\ \gamma & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\gamma n_1 + \gamma n_2 = 0 \\ -\gamma n_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n_1 = n_2 \\ n_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda_2 = 1$ o vetor próprio $\mathbf{n}^\circ = (0 \ 0 \ 1)$

o terceiro vetor próprio pode ser obtido por:

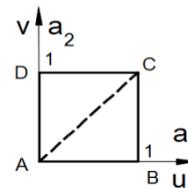
$$\mathbf{n}^{\circ} = \mathbf{n}^{\circ} \times \mathbf{n}^{\circ} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \{1 \quad -1 \quad 0\}$$

e) O tensor \mathbf{F} representado no referencial das suas direções principais é $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\gamma)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\gamma)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} (1+\gamma)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\gamma)^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 - 2\gamma \end{bmatrix}$$

f) A diagonal é representada pela direção $\mathbf{n}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1 \quad 0)$



A variação de comprimento numa dada direção é dada pela expressão (4.11), ou pela expressão:

$$\frac{(d^{\ell^x})^2 - (d^{\ell^a})^2}{(d^{\ell^a})^2} = \mathbf{n}^T \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1 \quad 1 \quad 0\} \frac{2}{2} \begin{bmatrix} \gamma^2 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{1 \quad 1 \quad 0\} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 2\gamma \\ 2\gamma + \gamma^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma^2 + 2\gamma$$

em que d^{ℓ^x} = comprimento final, d^{ℓ^0} = comprimento inicial

Como $(d^{\ell^0}) = \sqrt{2}$ obtém-se $\frac{(d^{\ell^x})^2}{(d^{\ell^0})^2} = \mathbf{n}^T \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} + 1 = \gamma^2 + 2\gamma + 1 \Leftrightarrow d^{\ell^x} = \sqrt{2} \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma + 1}$

Alternativamente, calculamos a posição deformada dos pontos A e C para obter a distância:

$$\mathbf{x}_A = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 + \gamma \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 + \gamma \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x}_C = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 + \gamma \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 + \gamma \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix}_{(1,1,0)} = \begin{Bmatrix} 1+\gamma \\ 1+\gamma \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C = \begin{Bmatrix} 1+\gamma \\ 1+\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \quad |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C| = \sqrt{(1+\gamma)^2 + (1+\gamma)^2} = \sqrt{2(1+\gamma)^2} = \sqrt{2} \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma + 1}$$

g) O ângulo entre AB e AD é:

$$d\mathbf{x}^{(AB)} \cdot d\mathbf{x}^{(AD)} = d\mathbf{a}^{(AB)} \cdot d\mathbf{a}^{(AD)} + d\mathbf{a}^{(AB)} \cdot 2\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{a}^{(AD)} = 0 + [1 \ 0 \ 0] \frac{2}{2} \begin{bmatrix} \gamma^2 & 2\gamma & 0 \\ 2\gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2\gamma \\ \gamma^2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\gamma$$

se $d\mathbf{x}$ for infinitesimal, temos $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{a}$

$$\text{Assim } d\mathbf{x}^{(AB)} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d\mathbf{x}^{(AD)} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x}^{(AB)} \cdot d\mathbf{x}^{(AD)} = [1 \ \gamma \ 0] \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\gamma$$

Calculando o produto interno pela outra forma, temos:

$$d\mathbf{x}^{(AB)} \cdot d\mathbf{x}^{(AD)} = |d\mathbf{x}^{(AB)}| |d\mathbf{x}^{(AD)}| \cos \theta = \sqrt{1+\gamma^2} \sqrt{\gamma^2+1} \cos \theta = (1+\gamma^2) \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2}$$

4.15.6 Exemplo 4.6 - Deformação numa placa fina (do 1º Teste 2015)

Uma placa circular fina é sujeita a uma deformação $\mathbf{x}_i(a_1, a_2) = R_{ij} U_{jk} a_k$ em que

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad U_{jk} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0$$

- Determine o campo de deslocamentos
- Determine o tensor das deformações
- Se $\lambda = 1$ verifique se a deformação é de corpo rígido
- Em que condições, com $\lambda = 1$, é que esta deformação é considerada uma deformação infinitesimal?
E quando $\lambda \neq 1$? Justifique.
- Determine a extensão infinitesimal no ponto (1,1) na direção (1,0).

Resolução:

a) $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$

$$\mathbf{x}_i(a_1, a_2) = R_{ij} U_{jk} a_k = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i(a_1, a_2) = \mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta - 1 & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\lambda \cos \theta - 1)a_1 + (-\lambda \sin \theta)a_2 \\ (\lambda \sin \theta)a_1 + (\lambda \cos \theta - 1)a_2 \end{Bmatrix}$$

b) Gradiente da Deformação

$$\underline{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta \\ -\lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Tensor da Deformação

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$$

- c) Se $\lambda = 1$ obtemos $\underline{E} = \underline{0}$ pelo que a deformação é rígida.
 d) Quando $\lambda = 1$ a deformação é infinitesimal se θ for pequeno quando $\lambda \neq 1$ a deformação é infinitesimal se θ for pequeno e $\lambda \approx 1$
 e) A extensão infinitesimal é dada por

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \underline{\eta}^T \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\eta}$$

em que
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) = \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & \lambda \cos \theta - 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a extensão infinitesimal pode-se também admitir que $\cos \theta \approx 1$ e portanto

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\eta} = (1, 0)$$

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \underline{\eta}^T \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\eta} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [1 \ 0] \begin{Bmatrix} \lambda - 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \lambda - 1$$

Notas:

- esta extensão é independente do ponto considerado;
- no tensor \underline{E} , o termo $\lambda^2 - 1$ pode ser decomposto em $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Como para deformações infinitesimais se terá de ter $\lambda \approx 1$, então o termo $(\lambda + 1) \approx 2$ de onde se pode verificar $\underline{\varepsilon} = \underline{E}$

4.15.7 Exemplo 4.7–Tensores das deformações (adaptado da recuperação do 1º teste 2015)

Uma placa fina quadrada de lado unitário é sujeita a uma deformação $x_i(a_1, a_2)$, $i = 1, 2$ definida por:

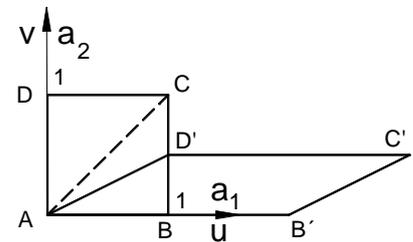
$$x_1 = \lambda a_1 + \gamma a_2 \quad x_2 = \delta a_2 \quad \text{em que } \lambda > 1, \gamma > 0, 0 < \delta < 1$$

- a) Apenas para esta alínea do problema dê valores às constantes λ , γ e δ que verifiquem as condições do enunciado. Desenhe a placa depois da deformação;
- b) Determine o campo de deslocamentos;
- c) Determine o tensor das deformações e o tensor das deformações infinitesimais;
- d) Em que condições esta deformação é considerada uma deformação infinitesimal? Justifique.
- e) Determine a extensão de corte infinitesimal no ponto $(1, 1, 0)$ segundo as direções dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 0)$.

Resolução

- a) Admitir, por exemplo, $\lambda = 2, \gamma = 1, \delta = 1/2$

A deformação vem $x_1 = 2a_1 + a_2$ $x_2 = \frac{1}{2}a_2$



- b) Campo de deslocamentos $u_1 = x_1 - a_1 = (\lambda - 1)a_1 + \gamma a_2$

$$u_2 = x_2 - a_2 = (\delta - 1)a_2$$

- c) Tensor das deformações $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right)$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) \Leftrightarrow E_{11} = (\lambda - 1) + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2$$

$$E_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \right) \Leftrightarrow E_{22} = (\delta - 1) + \frac{1}{2}[\gamma^2 + (\delta - 1)^2]$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \right) \Leftrightarrow E_{12} = \frac{1}{2}[\gamma + 0 + (\lambda - 1)\gamma + 0] = \frac{1}{2}(\gamma\lambda)$$

Tensor das Pequenas deformações

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \quad \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial a_1} = (\lambda - 1) \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = (\delta - 1) \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) = \frac{1}{2}\gamma$$

- d) Para se poder considerar pequenas deformações os tensores **E** e **e** terão de ser próximos, ou seja:

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \approx 0 \quad E_{11} \approx \epsilon_{11} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \approx 0 \Leftrightarrow \lambda \approx 1 \quad E_{12} \approx \epsilon_{12} \Leftrightarrow \lambda \approx 1$$

$$E_{22} \approx \epsilon_{22} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\gamma^2 + (\delta - 1)^2] \approx 0 \Leftrightarrow \gamma^2 + (\delta - 1)^2 \approx 0 \Leftrightarrow \lambda \approx 0 \wedge \delta \approx 1$$

e) A partir da expressão $\varepsilon_{\text{corte}} = \frac{\gamma_{\text{corte}}}{2} = n_i^{(AB)} \varepsilon_{ij} n_j^{(AD)}$, considerando apenas o plano XY (em ZZ é tudo nulo)

$$n_i^{(AB)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1) \quad n_j^{(AD)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1) \quad e_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \delta - 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\gamma_{\text{corte}}}{2} = n_i^{(AB)} e_{ij} n_j^{(AD)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1) \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \delta - 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 \quad 1) \begin{bmatrix} \lambda - 1 - \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma + 1 - \delta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\gamma_{\text{corte}}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda - \delta) \Leftrightarrow \gamma = \lambda - \delta$$

note-se que o tensor e é independente do ponto considerado.

4.15.8 Exemplo 4.8– Variação de comprimento de segmentos (pequenas deformações).

Seja ABCD um quadrado unitário no plano x,y. ABCD faz parte de um corpo que está sujeito a um estado de pequenas deformações uniforme em todo o corpo. O tensor das pequenas deformações é dado por:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Qual a variação de comprimento dos segmentos AC e AE?

4.15.9 Exemplo 4.9– Estado de deformação não homogéneo.

Uma placa quadrada $-1 < x < 1, -1 < y < 1$ é sujeita a uma deformação tal que o campo de deslocamentos é descrito por:

$$u_1 = \alpha (x^2 + y^2), u_2 = \beta x y, u_3 = 0.$$

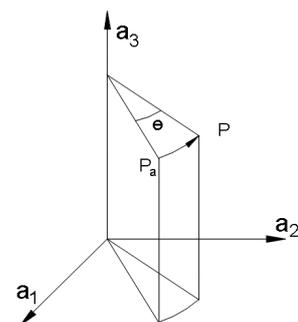
- Determine as componentes do tensor das deformações em (x,y).
- Determine as tensões principais no ponto (0,0). Admita que as constantes α, β são muito pequenas.

4.15.10 Exemplo 4.10- Rotação de corpo rígido.

Considere a deformação $\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{a}$, em que

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Verifique que se trata de uma deformação rígida
- Obtenha os tensores ε e e . Conclua que estes tensores não podem ser uma medida exata da deformação.



4.15.11 Exemplo 4.11– Deformação num tubo.

Um tubo de aço com comprimento $L=5\text{m}$, raio de 30cm e espessura de parede 5mm , é esticado axialmente 0.001m , expandido 0.001cm no diâmetro e torcido 1° . Obter o tensor das deformações no tubo.

Resolução:

$$u_z = \frac{\delta u_z}{L} z = \frac{0.001}{5} z$$

Em coordenadas cilíndricas, o campo de deslocamentos é $u_r = \frac{\delta r}{r_0} r = \frac{0.001}{30} r$

$$u_\theta = \chi r z = \frac{\theta}{L} r z = \frac{1^\circ}{5} r z$$

As componentes de deformação são:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{0.001}{30} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{0.001}{30} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{0.001}{5}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1^\circ}{5} z - \frac{1^\circ}{5} z \right) = 0$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (0 + \chi r) = \frac{1^\circ}{10} r$$

Notas:

- mesmo que só exista u_r , temos $\varepsilon_{\theta\theta} \neq 0$!
- o ângulo de torção deverá ser convertido para radianos