DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Solução do Exame de

Cálculo Diferencial e Integral III

22 de Fevereiro de 2022

Cursos de LIEC–A

Versão A

1. (2 val.) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' + \frac{3}{t}y = 1, \quad y(1) = 0. \tag{1}$$

Solução:

Sendo $\mu(t) = t^3 = \exp(\int \frac{3}{t}\, dt)$ obtem-se

$$\begin{aligned} \mu(t)\big(y' + \frac{3}{t}y\big) &= \mu(t) \\ \frac{d}{dt}\big(t^3 y\big) &= t^3 \\ t^3 y(t) - 0 &= \frac{t^4-1}{4} \\ y(t) &= \frac{t^4-1}{4t^3}, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

2. Considere o problema de valor inicial

$$(1 - y^2) - y(1-x)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

   (a) (3 val.) Resolve (2) para $x_0 = 0$ e $y_0 = 4$.

Solução:

A equação é separável e tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{1-y^2}y' &= \frac{1}{1-x} \\
-\frac{1}{2}\log|1-y^2| &= -\log|1-x| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
1-y^2 &= K(1-x)^2 \\
1-y^2 &= -15(1-x)^2 \\
y &= \sqrt{1+15(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

(b) (1 val.) Determine todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função constante $y(x) = y_0$ é uma solução do problema de valor inicial (2).

Solução:

Nota-se que uma função constante $y(x) = c$ é uma solução da equação em (2) se e só se

$$(1-c^2) - c(1-x)\cdot 0 = 0.$$

Logo $c = \pm 1$, e portanto para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 = \pm 1$, a função constante $y(x) = y_0$ é uma solução do problema de valor inicial (2).

(c) (1 val.) Indique, justicando, se o problema (2) com $(x_0, y_0) = (1, 1)$ tem mais de uma solução.

Solução:

As funções $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = \sqrt{1+15(1-x)^2}$ são duas soluções, e em geral para cada $c \geq 0$ a função $y_c(x) = \sqrt{1+c(1-x)^2}$ é uma solução da equação e $y_c(1) = 1$.

3. Considere o operador de derivação D, i.e., $D\big(f(t)\big) = f'(t)$, e o polinómio

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1). \tag{3}$$

(a) (2 val.) Determine a solução geral da equação homogénea $p(D)\big(y\big) = 0$.

Solução:

As raízes de p são $0, 1$ e -1. Segue-se que a solução geral é

$$A + B\cosh t + C\,\mathrm{senh}\, t, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

é a solução geral.

(b) (2 val.) Determine a solução geral da equação não homogénea $p(D)\big(y\big) = t + 2$.

Solução:

Sendo $y = At^2 + Bt$, obtem-se uma solução se e só se

$$-(2At + B) = t + 2.$$

Logo a solução geral é

$$A + B\cosh t + C\,\mathrm{senh}\, t - \frac{t^2}{2} - 2t.$$

(c) (2 val.) Determine a solução do problema de valor inicial

$$p(D)\big(y\big) = t + 2\,, \quad 0 = y(0) = y'(0) = y''(0). \tag{4}$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo a solução é

$$y(t) = -1 + \cosh t + 2\,\mathrm{senh}\, t - \frac{t^2}{2} - 2t.$$

4. (4 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x}\,, & 0 < x < 1,\ 0 < t; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & 0 \leq t; \\ u(x,0) = e^x\big(\mathrm{sen}(3\pi x) - 3\,\mathrm{sen}(9\pi x)\big)\,, & 0 \leq x \leq 1. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Solução:

Sendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ ontem-se

$$X'' - 2X' + X = (1+\lambda)X, \qquad X(0) = X(1) = 0;$$

$$\Big((\frac{d}{dx} - 1)^2 - (1+\lambda) \Big) X0;$$

$$T' - \lambda T = 0;$$

onde λ é uma constante real. Para $\lambda + 1 = 0$ tem-se

$$X(x) = (A + Bx)e^x;$$

para $\lambda + 1 = \mu^2 > 0$ tem-se

$$X(x) = e^x(A\cosh \mu x + B\,\mathrm{senh}\, \mu x);$$

e para $\lambda + 1 = -\mu^2 < 0$ tem-se

$$X(x) = e^x(A\cos\mu x + \operatorname{sen}\mu x).$$

Aplicando as condições $0 = X(0) = X(1)$ segue-se que $\lambda + 1 = -(n\pi)^2$ com $n = 1, 2, \ldots$. Aplicando a condição inicial obtemos

$$u(x,t) = e^{x-t}\big(e^{-9\pi^2 t}\operatorname{sen}(3\pi x) - 3e^{-81\pi^2 t}\operatorname{sen}(9\pi x)\big).$$

5. Seja $u(x,y,z)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ tal que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Para $0 < r$, considere a bola fechada $B(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, e define-se $F\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ por

$$F(r) = \frac{\int_{\partial B(r)} u(x,y,z)}{\int_{\partial B(r)} 1}. \tag{6}$$

(a) (2 val.) Calculando $F'(r)$ indique se a função $F(r)$ é constante.
Recorde-se o seguinte: Usando coordenadas esféricas

$$g(\theta,\phi) = \big(r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)$$

tem-se

$$\int_{\partial B(r)} 1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta = r^2\int_{\partial B(1)} 1 = 4\pi r^2.$$

Solução:

Tem-se

$$\int_{\partial B(r)} u(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\circ g(\theta,\phi) r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\big(r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta \\
F'(r) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \nabla u\big(r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\cdot \\
&\qquad\qquad \big(\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \cos(\phi)\big)\operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(1)} \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{B(1)} \operatorname{div}\nabla u = \frac{1}{4\pi}\int_{B(1)} \Delta u = 0.
\end{aligned}$$

Logo $F(r)$ é constante.

(b) (1 val.) Calcule $\lim_{r\to 0} F(r)$.

Solução:

A função $u(x,y,z)$ é contínua, e portanto em cada conjunto fechado e limitado é contínua uniformemente. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} F(r) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\big(r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\ \mathrm{sen}(\phi)d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \lim_{r\to 0} u\big(r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\ \mathrm{sen}(\phi)d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\big(0,0,0\big)\ \mathrm{sen}(\phi)d\phi d\theta \\
&= u(0,0,0).
\end{aligned}$$

Solução do Exame de

Cálculo Diferencial e Integral III

22 de Fevereiro de 2022

Cursos de LIEC–A

Versão B

1. (2 val.) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' + \frac{5}{t}y = 1, \quad y(1) = 0. \tag{1}$$

Solução:

$$y = \frac{t^6 - 1}{6t^5}, \qquad t > 0.$$

2. Considere o problema de valor inicial

$$(4 - y^2) + y(1 + x)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

(a) (3 val.) Resolve (2) para $x_0 = 0$ e $y_0 = 4$.

Solução:

$$y = \sqrt{4 + 12(1 + x)^2}.$$

(b) (1 val.) Determine todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função constante $y(x) = y_0$ é uma solução de (2).

Solução:

Nota-se que uma função constante $y(x) = c$ é uma solução da equação em (2) se e só se

$$(4 - c^2) + c(1 + x) \cdot 0 = 0.$$

Logo $c = \pm 2$, e portanto para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 = \pm 2$, a função constante $y(x) = y_0$ é uma solução do problema de valor inicial (2).

(c) (1 val.) Indique, justicando, se o problema (2) com $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ tem mais de uma solução.

Solução:

Para cada $0 \leq c \in \mathbb{R}$ a função

$$y_c(x) = \sqrt{4 + c(1+x)^2}$$

é uma solução da equation diferencial em (2) que satisfaz $y_c(-1) = \sqrt{4} = 2$.

3. Considere o operador de derivação D, i.e., $D\big(f(t)\big) = f'(t)$, e o polinómio

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 1). \tag{3}$$

(a) (2 val.) Determine a solução geral da equação homogénea $p(D)\big(y\big) = 0$.

Solução:

As raízes de p são $0, i$ e $-i$. Segue-se que a solução geral é

$$A + B\cos t + C \operatorname{sen} t, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

é a solução geral.

(b) (2 val.) Determine a solução geral da equação não homogénea $p(D)\big(y\big) = 2t + 1$.

Solução:

Sendo $y = At^2 + Bt$, obtem-se uma solução se e só se

$$2At + B = 2t + 1.$$

Logo a solução geral é

$$A + B\cos t + C \operatorname{sen} t + t^2 + t.$$

(c) (2 val.) Determine a solução do problema de valor inicial

$$p(D)\big(y\big) = 2t + 1\,, \quad 0 = y(0) = y'(0) = y''(0). \tag{4}$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Logo a solução é

$$y(t) = -2 + 2\cos t - \operatorname{sen} t + t^2 + t.$$

4. (4 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\,, && 0 < x < 1,\ 0 < t; \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, && 0 \le t; \\ u(x,0) &= e^{-x}\big(\operatorname{sen}(4\pi x) - 2\operatorname{sen}(6\pi x)\big)\,, && 0 \le x \le 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Solução:

Sendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ ontem-se

$$X'' + 2X' + X = (1+\lambda)X, \qquad X(0) = X(1) = 0;$$
$$\Big(\big(\frac{d}{dx} + 1\big)^2 - (1+\lambda)\Big)X = 0;$$
$$T' - \lambda T = 0;$$

onde λ é uma constante real. Para $\lambda + 1 = 0$ tem-se

$$X(x) = (A + Bx)e^{-x};$$

para $\lambda + 1 = \mu^2 > 0$ tem-se

$$X(x) = e^{-x}(A\cosh\mu x + B\operatorname{senh}\mu x);$$

e para $\lambda + 1 = -\mu^2 < 0$ tem-se

$$X(x) = e^{-x}(A\cos\mu x + \operatorname{sen}\mu x).$$

Aplicando as condições $0 = X(0) = X(1)$ segue-se que $\lambda + 1 = -(n\pi)^2$ com $n = 1, 2, \ldots$. Aplicando a condição inicial obtemos

$$u(x,t) = e^{-x-t}\big(e^{-16\pi^2 t}\operatorname{sen}(4\pi x) - 2e^{-36\pi^2 t}\operatorname{sen}(6\pi x)\big).$$

5. Seja $u(x,y,z)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ tal que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Para $0 < r$, considere a bola fechada $B(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$, e define-se $F\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ por

$$F(r) = \frac{\int_{\partial B(r)} u(x,y,z)}{\int_{\partial B(r)} 1}. \tag{6}$$

(a) (2 val.) Calculando $F'(r)$ indique se a função $F(r)$ é constante.
Recorde-se o seguinte: Usando coordenadas esféricas

$$g(\theta,\phi) = \big(r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)$$

tem-se

$$\int_{\partial B(r)} 1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\operatorname{sen}(\phi)\,d\phi d\theta = r^2\int_{\partial B(1)} 1 = 4\pi r^2.$$

Solução:

Tem-se

$$\int_{\partial B(r)} u(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u \circ g(\theta,\phi) r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u\big(r \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big) \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta \\
F'(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \nabla u\big(r \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big) \cdot \\
&\qquad\qquad \big(\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \cos(\phi)\big) \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(1)} \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{B(1)} \operatorname{div} \nabla u = \frac{1}{4\pi} \int_{B(1)} \Delta u = 0.
\end{aligned}$$

Logo $F(r)$ é constante.

(b) (1 val.) Calcule $\lim_{r\to 0} F(r)$.

Solução:

A função $u(x,y,z)$ é contínua, e portanto em cada conjunto fechado e limitado é contínua uniformemente. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} F(r) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\big(r \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\ \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \lim_{r\to 0} u\big(r \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\phi)\big)\ \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\big(0,0,0\big)\ \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta \\
&= u(0,0,0).
\end{aligned}$$