Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Topologia

1° Exame - 14 de Fevereiro de 2022 - 8h00m
Duração: 120 min.

Justifique todas as respostas

1. Considere a seguinte colecção de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\mathscr{S} = \{\, [n, n+2[\, \}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Seja $\mathscr{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathscr{S}$.

(a) Determine uma base para $\mathscr{T}$.
Sol. Intersecções de elementos da subbase: $\mathscr{B} = \{[n, n+1[\,, [n, n+2[\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Também está correcto $\{[n, n+1[\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pois $[n, n+2[\, = [n, n+1[\, \cup [n+1, n+2[$.
(b) Determine o interior de $A =]-1, 1[$ na topologia $\mathscr{T}$.
Sol. $\operatorname{Int} A = [0, 1[$, que é o único elemento da base contido em A.
(c) Descreva a topologia de subespaço induzida por $\mathscr{T}$ em $A_n = [n, n+1[\, \subset \mathbb{R}$.
Sol. $\{U \cap A_n : U \in \mathscr{T}\} = \{\emptyset, A_n\}$: Topologia indiscreta.
(d) Mostre que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ são as componentes conexas de $\mathbb{R}$ com a topologia $\mathscr{T}$.
Sol São conexos pois têm a topologia indiscreta, são abertos, e são fechados pois $\mathbb{R}\backslash A_n = \bigcup_{k\neq n} A_k$. Alternativamente: são conexos, abertos e formam uma partição de $\mathbb{R}$.
(e) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x \geqslant 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Decida se f é ou não contínua em $x = 0$, em que $\mathbb{R}$ tem a topologia $\mathscr{T}$ tanto no domínio como no conjunto de chegada.
Sol. Uma base de vizinhanças de $f(0)$ é $\{[1, 2[\}$. Se $V = [1, 2[$ tomamos $U = [0, 1[\, \in \mathscr{V}_0$. Então $f(U) = \{1\} \subset V$.

2. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 4\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

(a) Mostre que existe uma retracção por deformação de A para $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$
Sol. $H(\vec{u}, t) = t\vec{u} + (1-t)r(\vec{u})$ em que $r(\vec{u}) = 2\vec{u}/\|\vec{u}\|$.
(b) Calcule os grupos fundamentais de A e de $A \cup B$.
Sol. A é homotopicamente equivalente a S^1 logo tem grupo fundamental $\mathbb{Z}$. $A \cup B$ é homotopicamente equivalente ao oito logo $\pi_1 = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ (tal como é dito na questão 6b)
(c) Calcule o grupo fundamental de $B \times \mathbb{P}^2$
Sol. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_2$.

3. Seja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(x) = \big(\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)\big)$ seja $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ e $\beta\colon I \to S^1$ definidos por

$$\alpha(t) = \cos(\pi t) - 1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \big(\cos(2\pi t^3), \operatorname{sen}(2\pi t^3)\big) \in S^1$$

(a) Determine o levantamento de β com início em $\alpha(1) = -2$.
Sol. $\beta(t) = p(t^3)$ logo os levantamentos de β são da forma $\widetilde{\beta}(t) = t^3 + k$. com $k \in \mathbb{Z}$. $\widetilde{\beta}(0) = -2$ logo $\widetilde{\beta}(t) = t^3 - 2$.
(b) Justifique que o caminho α é homotopico a um caminho $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ da forma $\gamma(t) = nt$ e determine n.
Sol. $\mathbb{R}$ é convexo e $\alpha(0) = \gamma(0)$. Basta por isso que $\alpha(1) = \gamma(1)$ ou seja $n = -2$.

(c) Qual o elemento do grupo fundamental $\pi_1(S^1,(1,0)) \cong \mathbb{Z}$ representado pelo caminho $(p\circ\alpha)\star\beta$?

Sol. α é um levantamento de $p\circ\alpha$ e como $\alpha(1)=\widetilde{\beta}(0)$, $\alpha\star\widetilde{\beta}$ é um levantamento de $(p\circ\alpha)\star\beta$. Como $(\alpha\star\widetilde{\beta})(0)=\alpha(0)=0$, o elemento do grupo fundamental representado por $(p\circ\alpha)\star\beta$ é dado por $(\alpha\star\widetilde{\beta})(1)=\widetilde{\beta}(1)=-1$.

4. Considere a acção $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(n,x)=n+x$.

(a) Mostre que esta acção é propriamente descontínua.

Sol. Para qualquer x tomamos $U_x=\left]x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right[$. Então para $n\neq 0$:

$$n(U_x)\cap U_x=\left]n+x-\tfrac{1}{2},n+x+\tfrac{1}{2}\right[\cap\left]x-\tfrac{1}{2},x+\tfrac{1}{2}\right[=\varnothing$$

(b) Mostre, usando os resultados sobre acções propriamente descontínuas e revestimentos, que $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},[0])\cong\mathbb{Z}$.

Sol. $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})\cong\mathbb{Z}$ e $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})\cong\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},[0])/I_x=\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},[0])$ pois $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo.

(c) Mostre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é homeomorfo a S^1. Sugestão: qualquer revestimento é uma função aberta, e como tal, é um quociente.

Sol. Seja $p\colon\mathbb{R}\to S^1$ o revestimento usual. p é aberto porque é um homeomorfismo local, logo é um quociente pois se $p^{-1}(U)$ é aberto, $p(p^{-1}(U))=U$ é também aberto. Como p é um quociente, $S^1\cong\mathbb{R}/\!\sim$ em que $x\sim y\Leftrightarrow p(x)=p(y)\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$. Esta é precisamente a relação de equivalência induzida pela acção de $\mathbb{Z}$ logo $\mathbb{R}/\!\sim\;=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

5. Seja X a superfície obtida como quociente dum polígono com esquema de etiquetas $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$.

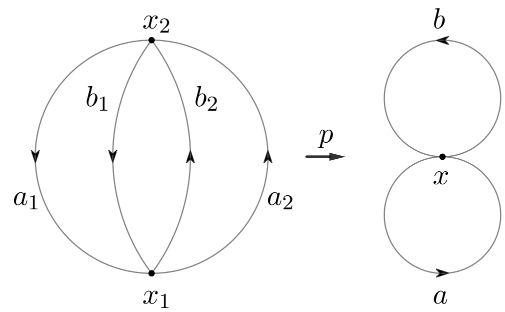
(a) Calcule o grupo fundamental e a homologia de X.

Sol. Há três vértices no quociente. O quociente A da fronteira do polígono tem grupo fundamental $\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}$ gerado por $\{abc,da^{-1}\}$. O gerador de $\pi_1(S^1)$ tem imagem em $\pi_1(A)$ dada por $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}=(abc)(da^{-1})(abc)^{-1}(da^{-1})^{-1}$ pelo que o grupo fundamental de X é gerador por abc e da^{-1} com uma relação $(abc)(da^{-1})(abc)^{-1}(da^{-1})^{-1}=1$. Este grupo é $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ que já é abeliano logo a homologia é também $H_1=\pi_1=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(b) Identifique a superfície $X\#\mathbb{P}^2$ (a soma conexa de X com $\mathbb{P}^2$), de acordo com o Teorema de classificação de superfícies.

Sol. Sabendo a homologia sabemos a superfície: X é o toro logo $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2=\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$.

6. Considere o revestimento $p\colon E \to B$ da figua oito ilustrado na figura:



em que a imagem dos pontos x_i é x e as linhas a_i e b_i são enviadas para a e b, respectivamente, preservando as orientações.

(a) Qual o levantamento do caminho $a \star b \star \overline{a}$ com início em x_1?

Sol. $a_2 \star b_1 \star \overline{a}_1$.

(b) Recorde que $\pi_1(B, x) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ com geradores a e b. Descreva a acção de $\pi_1(B, x)$ em $p^{-1}(x)$.

Sol. $p^{-1}(x) = \{x_1, x_2\}$. Os levantamentos do caminho a com início em x_1 e em x_2 são respectivamente a_2 e a_1 logo

$$x_1 \xrightarrow{a} a_2(1) = x_2 \qquad \text{e} \qquad x_2 \xrightarrow{a} a_1(1) = x_1$$

Os levantamentos do caminho b com início em x_1 e em x_2 são respectivamente b_2 e b_1 logo

$$x_1 \xrightarrow{b} b_2(1) = x_2 \qquad \text{e} \qquad x_2 \xrightarrow{b} b_1(1) = x_1$$

(c) Mostre que $\pi_1(E, x_1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ e indique 3 geradores. Breves justificações esboçandos os conjuntos são suficientes.

Sol. Escrevemos E como união de 3 abertos homotopicamente equivalentes a S^1 com todas as intersecções simplesmente conexas. Exemplo de geradores: $\{a_2 b_2^{-1}, a_2 b_1, a_2 a_1\}$.

(d) Determine o estabilizador I_{x_1} de x_1.

Sol. $I_{x_1} = p_*(\pi_1(E, x_1))$. Como p_* é injectivo, $I_x \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ com geradores $p_*(a_2 b_2^{-1}) = ab^{-1}$, $p_*(a_2 b_1) = ab$ e $p_*(a_2 a_1) = a^2$.