DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Solução do Exame de Cálculo Diferencial e Integral III

10 de Fevereiro de 2022

Cursos de LIEC–A

Versão A

1. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+3y^2}, \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

(a) (3 val.) Determine uma solução implícita ou explícita do problema.

Solução:

A equação é separável e tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{2t}{1+3y^2} \\
(1+3y^2)\frac{dy}{dt} &= 2t \\
\int_0^t (1+3y^2)\frac{dy}{ds}\,ds &= \int_0^t 2s\,ds \\
y + y^3 - \left(y(0) - y(0)^3\right) &= t^2
\end{aligned}$$

Obtém-se uma solução implícita: $y + y^3 = t^2$.

(b) (2 val.) Indique, **justificando**, o intervalo máximo de definição da solução $y(t)$ do problema (1).

Solução:

O domínio da função $f(t,y) = \dfrac{2t}{1+3y^2}$ é $\mathbb{R}^2$ e f é de classe C^2. Portanto o intervalo máximo de definição da solução $y(t)$ de (1) é da forma $]a,b[$ com $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. No caso $-\infty < a$, tem-se

$$\lim_{t\to a^+} |y(t)| = +\infty,$$

e nos caso $b < +\infty$ tem-se

$$\lim_{t\to b^-} |y(t)| = +\infty.$$

Para $t \geq 0$ tem-se

$$0 \leq \frac{2t}{1+3y^2} \leq 2t.$$

Segue-se que

$$0 \leq t \implies 0 \leq y(t) \leq t^2.$$

Para $t \leq 0$, tem-se

$$2t \leq \frac{2t}{1+3y^2} \leq 0,$$

e portanto

$$0 \geq t \implies 0 \leq y(t) \leq t^2.$$

Logo a solução não explode e o intervalo máximo da solução é $]-\infty, +\infty[$.

2. Seja A uma matriz de tipo 3×3. Suponha-se que existe uma base $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{w}. \tag{2}$$

(a) (2 val.) Determine funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ tais que a solução do problema de valor inicial $\boldsymbol{x}'(t) - A\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}(0) = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$, pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{x}(t) = f(t)\boldsymbol{u} + g(t)\boldsymbol{v} + h(t)\boldsymbol{w}.$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned} e^{At}\boldsymbol{u} &= e^{2t}\boldsymbol{u} \\ e^{At}\boldsymbol{v} &= e^{2t}\boldsymbol{v} + te^{2t}\boldsymbol{u} \\ e^{At}\boldsymbol{w} &= e^{-2t}\boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Logo

$$e^{At}\left(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}\right) = (a+bt)e^{2t}\boldsymbol{u} + be^{2t}\boldsymbol{v} + ce^{2t}\boldsymbol{w}$$

e

$$f(t) = (a+bt)e^{2t}, \quad g(t) = be^{2t}, \quad h(t) = ce^{-2t}.$$

(b) (1 val.) Determine o maior subespaço linear $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que para cada vetor $\boldsymbol{x} \in V$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Solução:

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}(a+tb)e^{2t} &= 0 &&\iff 0 = a = b \\ \lim_{t\to\infty} be^{2t} &= 0 &&\iff b = 0 \\ \lim_{t\to\infty} ce^{-2t} &= 0 &&\forall c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Segue-se que o maior subespaço é

$$V = \{cw : c \in \mathbb{R}\}.$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad 0 < x < \pi. \tag{3}$$

(a) (3 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação (3).

Solução:

$$y_h(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen} x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) (3 val.) Determine a solução geral de (3).

Solução:

A matriz Wronskiana associada à solução da equação homogénea é

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Pelo método da variação das constantes existe uma solução da forma

$$u(x)\cos x + v(x)\operatorname{sen} x$$

com

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = W^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{pmatrix}.$$

Logo a solução geral é

$$y(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen} x - x\cos(x) + \log\big(\operatorname{sen}(x)\big)\operatorname{sen}(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. (2 val.) Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2. Considere a bola

$$B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} \qquad \text{com } r > 0,$$

e o vetor normal unitário exterior $\hat{\boldsymbol{n}}(x, y, z)$ da superfície ∂B_r. Usando o teorema de Gauss (divergência), mostre que

$$\int_{B_r} (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz = \int_{\partial B_r} \Big(f\frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} - g\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\Big).$$

Recorde-se que a dervidada direcional de f segundo o vetor $\hat{\boldsymbol{n}}$ é $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = \nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r}\Big(f\frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}-g\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\Big)&=\int_{\partial B_r}(f\nabla g-g\nabla f)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\\&=\int_{B_r}\operatorname{div}\big(f\nabla g-g\nabla f\big)\,dxdydz\\&=\int_{B_r}\big(\nabla f\cdot\nabla g+f\Delta g-\nabla g\cdot\nabla f-g\Delta f\big)\,dxdydz\\&=\int_{B_r}\big(f\Delta g-g\Delta f\big)\,dxdydz\end{aligned}$$

5. Considere a equação de calor

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && 0<x<1,\ 0<t;\\ u(0,t)&=u(1,t)=0, && 0<t;\\ u(x,0)&=4x(1-x), && 0<x<1.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

(a) (1 val.) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução, então $u(1-x,t)$ é uma solução de (4).

Solução:

Sendo $v(x,t)=u(1-x,t)$ tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(1-x,t),\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)=(-1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x,t).$$

Portanto $v(x,t)$ é uma solução da equação de calor. Como

$$\begin{aligned}v(x,0)&=u(1-x,0)=4(1-x)(1-1+x)=4x(1-x),\\ v(0,t)&=u(1,t)=0,\\ v(1,t)&=v(0,t)=0.\end{aligned}$$

Segue-se que $v(x,t)$ é uma solução de (4).

(b) (1 val.) Indique, **justificando**, se $u(x,t)$ é uma solução então $0\le u(x,t)\le 1$ para cada $0<t$ e cada $0<x<1$. *Sugestão:* Considere o princípio de máximo fraco.

Solução:

Seja $u(x,t)$ uma solução de (4). Tem-se

$$0=u(0,0)\le u(x,0)\le u(1/2,0)=1\qquad\text{para cada } x\in[0,1].$$

Pelo princípio de máximo fraco tem-se para cada $T>0$

$$0=\min_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le 1}}\big\{u(0,t),u(1,t),u(x,0)\big\}=\min_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le 1}}\big\{u(x,t)\big\}$$

e

$$\max_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le 1}}\{u(x,t)\} = \max_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le 1}}\{u(0,t),u(1,t),u(x,0)\} = 1.$$

Segue-se que $0 \le u(x,t) \le 1$.

(c) (1 val.) Para $J(t) = \int_0^1 u(x,t)^2\,dx$, onde $u(x,t)$ é uma solução de (4), mostre que

$$0 < t_0 < t_1 \quad \text{implica que} \quad J(t_0) \ge J(t_1).$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_0^1 2uu_t\,dx \\ &= \int_0^1 2uu_{xx}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) - u_x^2\right] dx \\ &= 2\big(u(1,t)u_x(1,t) - u(0,t)u_x(0,t) - \int_0^1 u_x^2\,dx\big) \\ &= -2\int_0^1 u_x^2\,dx \le 0. \end{aligned}$$

Segue-se que $t_0 < t_1 \implies J(t_0) \ge J(t_1)$.

(d) (1 val.) Indique, **justificando**, se o problema (4) pode ter mais de uma solução.

Solução:

Se $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são soluções de (4), então $u = u_1 - u_2$ é uma solução de equação de calor que satisfaz as condições homogéneas de Dirichlet e a condição inicial $u(x,0) = 0$. Sendo

$$J(t) = \int_0^1 u(x,t)^2\,dx,$$

e notando que $J(0) = 0$, $J(t) \ge 0$ e $J'(t) \le 0$. Segue-se que $u(x,t) \equiv 0$, e portanto $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Logo a equação não pode ter mais de uma solução.

Nota-se que na parte (a) *tem-se* $u(x,t) = u(1-x,t)$.

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Solução do Exame de

Cálculo Diferencial e Integral III

10 de Fevereiro de 2022

Cursos de LIEC–A

Versão B

1. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+9y^2}, \qquad y(0) = 1. \tag{5}$$

(a) (3 val.) Determine uma solução implícita ou explícita do problema.

Solução:

A equação é separável e tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{1+9y^2} \\ (1+9y^2)\frac{dy}{dt} &= 2 \\ \int_0^t (1+9y^2)\frac{dy}{ds}\,ds &= \int_0^t 2\,ds \\ y + 3y^3 - \left(y(0) - 3y(0)^3\right) &= 2t \end{aligned}$$

A solução é dada implicitamente por $y + 3y^3 = 2t + 4$.

(b) (2 val.) Indique, **justificando**, o intervalo máximo de definição da solução $y(t)$ do problema (5).

Solução:

O domínio da função $f(t,y) = \dfrac{2}{1+9y^2}$ é $\mathbb{R}^2$ e f é de classe C^2. Portanto o intervalo máximo de definição da solução $y(t)$ de (1) é da forma $]a,b[$ com $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. No caso $-\infty < a$, tem-se

$$\lim_{t\to a^+} |y(t)| = +\infty,$$

e nos caso $b < +\infty$ tem-se

$$\lim_{t\to b^-} |y(t)| = +\infty.$$

Tem-se

$$0 \leq \frac{2}{1+9y^2} \leq 2.$$

Segue-se que

$$0 \leq t \implies 1 \leq y(t) \leq 2t+1,$$

e

$$0 \geq t \implies 2t+1 \leq y(t) \leq 1.$$

Logo a solução não explode e o intervalo máximo da solução é $]-\infty, +\infty[$.

2. Seja A uma matriz de tipo 3×3. Suponha-se que existe uma base $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}, \quad A\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{v}, \quad A\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}. \tag{6}$$

(a) (2 val.) Determine funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ tais que a solução do problema de valor inicial $\boldsymbol{x}'(t) - A\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}(0) = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$, pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{x}(t) = f(t)\boldsymbol{u} + g(t)\boldsymbol{v} + h(t)\boldsymbol{w}.$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned} e^{At}\boldsymbol{u} &= e^{2t}\boldsymbol{u} \\ e^{At}\boldsymbol{v} &= e^{-2t}\boldsymbol{v} \\ e^{At}\boldsymbol{w} &= e^{-2t}\boldsymbol{w} + te^{-2t}\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Logo

$$e^{At}\left(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}\right) = ae^{2t}\boldsymbol{u} + (b+tc)e^{-2t}\boldsymbol{v} + ce^{-2t}\boldsymbol{w}$$

e

$$f(t) = ae^{2t}, \quad g(t) = (b+ct)e^{-2t}, \quad h(t) = ce^{-2t}.$$

(b) (1 val.) Determine o maior subespaço linear $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que para cada vetor $\boldsymbol{x} \in V$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Solução:

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} ae^{2t} &= 0 \qquad \iff 0 = a \\ \lim_{t\to\infty} (b+ct)e^{-2t} &= 0 \qquad \forall b, c \in \mathbb{R} \\ \lim_{t\to\infty} ce^{-2t} &= 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Segue-se que o maior subespaço é

$$V = \left\{b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} : b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

(a) (3 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação (7).

Solução:

$$y_h(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}\,x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) (3 val.) Determine a solução geral de (7).

Solução:

A matriz Wronskiana associada à solução da equação homogénea é

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos x & \mathrm{sen}\,x \\ -\,\mathrm{sen}\,x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Pelo método da variação das constantes existe uma solução da forma

$$u(x)\cos x + v(x)\,\mathrm{sen}\,x$$

com

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = W^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{sen}}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo a solução geral é

$$y(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}\,x + \log(\cos x)\cos(x) + x\,\mathrm{sen}(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. (2 val.) Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2. Considere a bola

$$B_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} \qquad \text{com } r > 0,$$

e o vetor normal unitário exterior $\hat{\boldsymbol{n}}(x,y,z)$ da superfície ∂B_r. Usando o teorema de Gauss (divergência), mostre que

$$\int_{B_r} (g\Delta f - f\Delta g)\,dxdydz = \int_{\partial B_r} \Big(g\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} - f\frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\Big).$$

Recorde-se que a dervidada direcional de f segundo o vetor $\hat{\boldsymbol{n}}$ é $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = \nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r} \Big(g\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} - f\frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\Big) &= \int_{\partial B_r} (g\nabla f - f\nabla g)\cdot \hat{\boldsymbol{n}} \\
&= \int_{B_r} \operatorname{div}\big(g\nabla f - f\nabla g\big)\, dxdydz \\
&= \int_{B_r} \big(\nabla g\cdot\nabla f + g\Delta f - \nabla f\cdot \nabla g - f\Delta g\big)\, dxdydz \\
&= \int_{B_r} \big(g\Delta f - f\Delta g\big)\, dxdydz
\end{aligned}$$

5. Considere a equação de calor

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && 0 < x < 2,\ 0 < t; \\
u(0,t) = u(2,t) &= 0, && 0 < t; \\
u(x,0) &= x(2-x), && 0 < x < 2.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(a) (1 val.) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução, então $u(2-x,t)$ é uma solução de (8).

Solução:

Sendo $v(x,t) = u(2-x,t)$ tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(2-x,t), \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = (-1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2-x,t).$$

Portanto $v(x,t)$ é uma solução da equação de calor. Como

$$\begin{aligned}
v(x,0) &= u(2-x,0) = (2-x)(2-2+x) = x(2-x), \\
v(0,t) &= u(2,t) = 0, \\
v(2,t) &= v(0,t) = 0.
\end{aligned}$$

Segue-se que $v(x,t)$ é uma solução de (8).

(b) (1 val.) Indique, **justificando**, se $u(x,t)$ é uma solução então $0 \le u(x,t) \le 1$ para cada $0 < t$ e cada $0 < x < 2$. *Sugestão:* Considere o princípio de máximo fraco.

Solução:

Seja $u(x,t)$ uma solução de (8). Tem-se

$$0 = u(0,0) \le u(x,0) \le u(1,0) = 1 \qquad \text{para cada } x \in [0,2].$$

Pelo princípio de máximo fraco tem-se para cada $T > 0$

$$0 = \min_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le 2}} \big\{u(0,t), u(2,t), u(x,0)\big\} = \min_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le x\le 2}} \big\{u(x,t)\big\}$$

e

$$\max_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le 2}}\left\{u(x,t)\right\} = \max_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le 2}}\left\{u(0,t),u(2,t),u(x,0)\right\} = 1.$$

Segue-se que $0 \le u(x,t) \le 1$.

(c) (1 val.) Para $J(t) = \int_0^2 u(x,t)^2\,dx$, onde $u(x,t)$ é uma solução de (8), mostre que

$$0 < t_0 < t_1 \quad \text{implica que} \quad J(t_0) \ge J(t_1).$$

Solução:

Tem-se

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_0^2 2uu_t\,dx \\ &= \int_0^2 2uu_{xx}\,dx \\ &= 2\int_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) - u_x^2\right] dx \\ &= 2\big(u(2,t)u_x(2,t) - u(0,t)u_x(0,t) - \int_0^1 u_x^2\,dx\big) \\ &= -2\int_0^2 u_x^2\,dx \le 0. \end{aligned}$$

Segue-se que $t_0 < t_1 \implies J(t_0) \ge J(t_1)$.

(d) (1 val.) Indique, **justificando**, se o problema (8) pode ter mais de uma solução.

Solução:

Se $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são soluções de (8), então $u = u_1 - u_2$ é uma solução de equação de calor que satisfaz as condições homogéneas de Dirichlet e a condição inicial $u(x,0) = 0$. Sendo

$$J(t) = \int_0^2 u(x,t)^2\,dx,$$

e notando que $J(0) = 0$, $J(t) \ge 0$ e $J'(t) \le 0$. Segue-se que $u(x,t) \equiv 0$, e portanto $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Logo a equação não pode ter mais de uma solução.

Nota-se que na parte (b) *tem-se* $u(x,t) = u(2-x,t)$.