DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

TESTE 3 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

CURSOS: LIEC–A

VERSÃO C

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	9	
2	11	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________

Sala: ______________

1. Considere a função $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

(a) (4 val.) Determine a série de Fourier no intervalo $[-\pi,\pi]$ da função f.

Solução:

Os coeficientes da série de Fourier são:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\,dx \\ &= \frac{(-1)^n+1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{-\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{(-1)^n+1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= -\frac{(-1)^n+1}{n\pi}\Big[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\Big] \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0} \frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}\big((2n+1)2x\big).$$

(b) (3 val.) Determine a convergência pontual da série da Fourier de f.

Solução:

Sendo $\mathcal{SF}(f)(x)$ a série de Fourier de f temos

$$\mathcal{SF}(f)(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \pi; \\ \frac{1}{2} & x = \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}, 0; \end{cases}$$

e $\mathcal{SF}(f)(2\pi + x) = \mathcal{SF}(f)(x)$.

(c) (2 val.) Indique se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{2}$$

é convergente ou divergente, e no caso de ser convergente determine a soma da série.

Solução:

Temos

$$0 = \mathcal{SF}(f)\,(\pi/4) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Portanto a série é convergente e a soma da série é $\frac{\pi}{4}$.

2. Considere a equação das ondas em um material resistente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r\frac{\partial u}{\partial t}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t; && (3)\\
u(0,t) &= 0, && 0 < t; && (4)\\
u(\pi,t) &= 0, && 0 < t; && (5)\\
u(x,0) &= 0, && 0 < x < \pi; && (6)\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(2x), && 0 < x < \pi; && (7)
\end{aligned}$$

onde r é uma constante.

(a) (4 val.) Para $0 < r < 1$ determine uma solução de (3)–(7).

Solução:

Sendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtemos condições $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$ e $T(0) = 0$. Logo para $n > 0$ um inteiro, temos $X_n = A_n sen(nx)$ e

$$T'' + 2rT' + n^2 T = 0, \quad T(0) = 0.$$

Como $0 < r < 1$ temos

$$T_n(t) = e^{-rt} B_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2 - r^2}\,t)$$

e

$$u(x,t) = e^{-rt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\operatorname{sen}(\sqrt{1-r^2}\,t)\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{\sqrt{4-r^2}}\operatorname{sen}(\sqrt{4-r2}\,t)\operatorname{sen}(2x)\right).$$

(b) (4 val.) Para $1 < r < 2$ determine uma solução de (3)–(7).

Solução:

$$u(x,t) = e^{-rt}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}\operatorname{senh}(\sqrt{r^2-1}\,t)\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{\sqrt{4-r^2}}\operatorname{sen}(\sqrt{4-r2}\,t)\operatorname{sen}(2x)\right).$$

(c) (3 val.) Para $r = 1$ determine uma solução de (3)–(7).

Solução:

$$u(x,t) = e^{-t}\left(t\,\mathrm{sen}(x) + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t)\,\mathrm{sen}(2x)\right)$$