DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

TESTE 3 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

CURSOS: LIEC–A

VERSÃO B

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	9	
2	11	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________ Sala: ______________

1. Consider a função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0; \\ 2, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

(a) (4 val.) Determine a série de Fourier no intervalo $[-1,1]$ da função f.

Resolução:

A série de Fourier é

$$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\pi x}{2n+1}.$$

(b) (3 val.) Determine a convergência pontual da série da Fourier de f.

Resolução:

Sendo $\mathcal{SF}(f)(x)$ a série de Fourier de f temos

$$\mathcal{SF}(f)(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ 1, & x = -1, 0, 1; \\ 2, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

e $\mathcal{SF}(f)(x) = \mathcal{SF}(f)(x+2)$.

(c) (2 val.) Indique se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{2}$$

é convergente ou divergente, e no caso de ser convergente determine a soma da série.

Resolução:

Como $\operatorname{sen}((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$, segue-se que a série é convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Considere a equação de calor não homogénea com condições homogéneas de Neumann

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x), \quad && 0 < x < 1,\ 0 < t; && (3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, && 0 < t; && (4)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, && 0 < t; && (5)\\
u(x, 0) &= \phi(x), && 0 < x < 1. && (6)
\end{aligned}
$$

(a) (3 val.) Usando o método de separação de variáveis, determine uma solução formal de (3)–(6) para $f(x) \equiv 0$ e $\phi(x)$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$.

Res

(b) (4 val.) Sendo $f(x) = \cos(2\pi x)$, determine uma solução de (3)–(5).

Res

(c) (4 val.) Para $f(x) = \cos(2\pi x)$ e $\phi(x) = 1 - \cos(\pi x)$ resolva (3)–(6).

Res