DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

Teste 2 de Cálculo Diferencial e Integral III

Cursos: LIEC–A

Versão B

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________ Sala: ______________

1. Consider a equação

$$y^{(3)} - y^{(2)} = x. \tag{1}$$

(a) (2 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação (1).

Solução:

$$y_h(x) = a + bx + ce^x$$

(b) (3 val.) Determine a solução de (1) que satisfaz $0 = y(0) = y'(0) = y''(0)$.

Solução:

$$y(x) = -1 - x + e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$$

2. Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' + xy' = x, \quad x > 0. \tag{2}$$

(a) (1 val.) Determine uma solução particular da equação da forma $y(x) = x^r$.

Solução:

Sendo $y = x^r$ obtemos uma solução particular se e só se

$$(r(r-1) + r)x^r = x.$$

Logo $y(x) = x$ é uma solução.

(b) (4 val.) Determine a solução geral da equação (2).

Solução:

Temos uma equação linear da primeira ordem em y' e um fator integrante $\mu(x) = \exp \int^x s^{-1} ds = x$:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{y'}{x} &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}(xy') &= 1 \\ xy' &= x + A \\ y' &= 1 + \frac{A}{x} \\ y &= A \log x + B + x. \end{aligned}$$

3. Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial.

(a) (2 val.) Sendo a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, para $a \in \mathbb{R}$ determine a transformada de Laplace da função $e^{at} \cdot f(t)$.

Solução:

Aplicando a definição obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a) = F(s-a)\end{aligned}$$

(b) (3 val.) Resolva $y'' = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t. \end{cases}$$

Solução:

Usando a transformada de Laplace e $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ obtemos

$$\begin{aligned}s^2 Y - 1 &= \int_0^2 e^{-st}\, dt \\ Y &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}(1 - e^{-2s}) \\ y(t) &= t + \frac{t^2}{2} - \frac{H(t-2)}{2}(t-2)^2\end{aligned}$$

onde $H(t)$ é a função Heaviside.

4. (5 val.) Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, xyz)$ e a superfície (elíptica no plano $z = 1$)

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq (3x)^2 + (2y)^2 \leq 36 \wedge z = 1\right\}$$

com bordo ∂S. Use o teorem de Stokes para calcular a área de S

Solução:

Temos uma parametrização de ∂S por

$$\mathbf{r}(\theta) = (2\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

e temos $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (xz, -yz, 2)$ e o vetor normal de S é $\widehat{\mathbf{n}} = (0,0,1)$. Aplicando o teorema de Stokes obtemos

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{n}} = \int_S 2 = 2 \times \text{área}(S) \\ = \oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ = \int_0^{2\pi} (-3\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\cdot(-2\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)\, d\theta \\ \int_0^{2\pi} 6\, d\theta = 12\pi.\end{aligned}$$

Logo a área de S é 6π.