DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

Teste 2 de Cálculo Diferencial e Integral III

Cursos: LIEC–A

Versão A

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________ Sala: ______________

1. Consider a equação

$$y^{(3)} - y^{(2)} = \cos x. \tag{1}$$

(a) (2 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação (1).

Resolução:

O polinómio característico da equação é $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$ e tem duas raízes razies, 0 com multiplicidade dois e 1. Logo a solução geral da equação homogénea é

$$y_h(x) = a + bx + ce^t.$$

(b) (3 val.) Determine a solução de (1) que satisfaz $0 = y(0) = y'(0) = y''(0)$.

Resolução:

Aplicando o método de coeficientes indeterminados uma solução da equação (1) tem da forma $y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$. Como $y_p'' = -y_p$, obtemos

$$\cos x = A\operatorname{sen} x - B\cos x + A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Logo $y_p(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)/2$ é uma solução e

$$a + bx + ce^t + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2}$$

é a solução geral. Aplicando as condições iniciais obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Logo a solução é

$$y(x) = -1 + \frac{e^x}{2} + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2}$$

2. Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = x, \quad x > 0. \tag{2}$$

(a) (1 val.) Determine a dimensão do espaço linear real gerado pelas soluções da forma $y(x) = x^\lambda$ da equação homogénea.

Resolução:

Como

$$\frac{d}{dx}x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$$

segue que x^λ é uma solução da equação homogénea se e só se

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 6x^\lambda = (\lambda^2+\lambda-6)x^\lambda = (\lambda-2)(\lambda+3)x^\lambda = 0.$$

Logo $\lambda = -3$ ou 2. Como as funções x^{-3} e x^2 são linearmente independentes, a dimensão do espaço é dois.

(b) (4 val.) Determine a solução geral da equação (2).

Resolução:

Aplicando o método de variação das constantes temos uma solução da forma

$$u_1x^{-3} + u_2x^2$$

com

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-3} & x^2 \\ -3x^{-4} & 2x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x^{-1} \end{pmatrix}$$

Logo a solução geral é

$$y(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3} - \frac{x}{4}$$

Notamos que para $y = ax$ temos

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 2xa - 6ax = -4ax = x \iff a = -\frac{1}{4}.$$

3. Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua em $[0,+\infty[$ e de ordem exponencial, e seja

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

(a) (2 val.) Sendo a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, para $0 < a \in \mathbb{R}$ determine a transformada de Laplace da função $f(t-a) \cdot H(t-a)$.

Resolução:

A transformada de Laplace de $f(t-a)H(t-a)$ é

$$\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt.$$

Sendo $u = t - a$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} f(u)\, du \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)\, du. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-sa} F(s).$$

(b) (3 val.) Resolva $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ 1, & 2\pi \leq t. \end{cases}$$

Resolução:

Sendo $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s)$ e aplicando a transformada de Laplace obtemos

$$s^2 Y - 1 + 2sY + 2Y = \int_{2\pi}^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} e^{-s\cdot 2\pi}$$

e

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + e^{-s\cdot 2\pi} \frac{1}{s\big((s+1)^2 + 1\big)}$$

Como

$$\frac{1}{s\big((s+1)^2+1\big)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}\right]$$

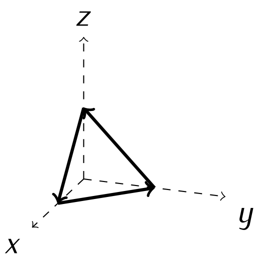
segue que

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{H(t-2\pi)}{2}\Big(1 - e^{-(t-2\pi)}\big(\cos(t-2\pi) + \mathrm{sen}(t-2\pi)\big)\Big) \\ &= e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{H(t-2\pi)}{2}\Big(1 - e^{-(t-2\pi)}\big(\cos(t) + \mathrm{sen}(t)\big)\Big) \end{aligned}$$

4. (5 val.) Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ e a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \wedge 0 < x \wedge 0 < y \wedge 0 < z\right\}$$

com bordo ∂S orientado pelos segmentos de retas de $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ a $(1, 0, 0)$.



Use o teorema de Stokes para calcular o integral de linha $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Resolução:

Temos $\operatorname{rot} \mathbf{F} = -(y, z, x)$ e o vetor normal de S é $\widehat{\mathbf{n}} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Pelo teorema de Stokes temos

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{n}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \int_S x + y + z = \frac{-1}{\sqrt{3}} \int_S 1.$$

A superfície S tem uma parametrização $f(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ com

$$U = \left\{(x, y) : 0 < x, 0 < y, 0 < x + y < 1\right\}.$$

Como

$$\sqrt{\det Df^t Df} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{3},$$

obtemos

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_U 1 = -\frac{1}{2}$$