ELETROMAGNETISMO

LEFT+LENO

Pré- Conjunto de problemas

(prática em Matemática)

1) *Lei de Coulomb*

A força elétrica que uma carga de prova q sente, quando se coloca no vácuo sob influência de outra carga Q à distância r, é dada por

$$\vec{F} = k_e \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r$$

em que $\vec{e}_r$ é o versor da direção de Q para q, a constante elétrica é $k_e = 9 \times 10^9 \ \mathrm{NC^{-2}m^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e a constante dielétrica no vácuo tem o valor $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} \ \mathrm{F/m}$.

a) Para uma carga Q =10 C colocada no ponto do espaço $\vec{r} = 5\vec{e}_x$, determine a força sentida por uma carga de prova q = +3 C em função das suas coordenadas (x,y,z).

b) Para o sistema de 3 cargas iguais a Q colocadas nos vértices de um triângulo equilátero,

   i) mostre qualitativamente (para q positivo) que o centro geométrico é um ponto de equilíbrio instável;

   ii) calcule a força sentida por uma carga de prova q no eixo perpendicular [eixo z] ao plano do triângulo passando no seu centro geométrico; faça uma figura da intensidade do campo em função da coordenada z [Wolfram Alpha].

   iii) faça uma figura [Wolfram Alpha] da intensidade (e sentido) da força elétrica sentida por uma carga de prova q ao longo de um eixo passando por uma das cargas e pelo centro geométrico do triângulo.

2) *Operadores Gradiente, Divergência, Rotacional*

a) Dada a função $f(x,y,z) = 6x + 4y^2z + 3yz^3$, calcule o gradiente de f (**grad** *f* ou $\vec{\nabla} f$) no ponto $\vec{r} = 3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z$.

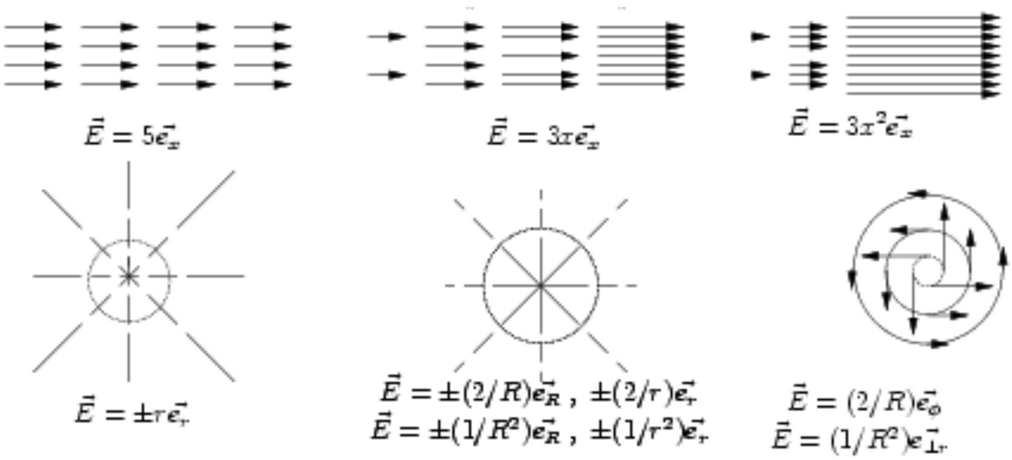
b) Dado o vetor $\vec{E} = 4x\vec{e}_x + 4y\vec{e}_y + 4z\vec{e}_z$ calcule a sua divergência e o seu rotacional no ponto $\vec{r} = 3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z$.

c) Dado o vetor $\vec{G} = x^2y\vec{e}_x + z^3\vec{e}_y + xy\vec{e}_z$ calcule a sua divergência e o seu rotacional no ponto $\vec{r} = 3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z$.

3) *Interpretação gráfica da Divergência e do Rotacional*

Dos campos vetoriais representados pelas linhas de força nas seguintes figuras, analise qualitativamente e determine se as respetivas divergências são nulas, positivas ou negativas, e se os rotacionais são ou não nulos em todos os pontos do espaço.

Nas figuras, as dependências com R representam simetrias cilíndricas, e as dependências com r representam simetrias esféricas.



4) *Força Elétrica*

Se uma em cada milhão de moléculas de água no corpo humano perdesse um eletrão (permanentemente, não para o meio), ficando as pessoas com um ligeiro excesso de carga positiva, calcule a força de repulsão entre duas pessoas a um metro de distância (massa das pessoas aproximadamente igual a 75 Kg e contendo 70% de água).

Calcule a força gravítica e a força elétrica que atrai o eletrão ao protão no átomo de hidrogénio sabendo que o raio da órbita é aproximadamente igual a 5,292 x 10^{-11} m (0,05292 nm), m_e = 9,1 x 10^{-31}Kg, m_p = 1,67 x 10^{-27}Kg, G_N= 6,673 x 10^{-11} m^3 $Kg^{-1}s^{-2}$, $k_e = 9\text{x}10^9$ $NC^{-2}m^2$, e que carga do eletrão e do protão são simétricas e de módulo e =1,6 x 10^{-19} C.

Calcule a força gravítica de atração e a força elétrica de repulsão entre dois protões no núcleo de hélio, sabendo que a distância média entre eles é de aproximadamente 1 fm = 10^{-15} m, e usando os dados do problema anterior (mas existe o núcleo de Hélio, certo?!).

5) *Função delta de Dirac a uma dimensão,* $\delta(x)$

Seja $\delta(x)$ a função definida como: $\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 0 \\ +\infty \text{ se } x = 0 \end{cases}$ e ainda sujeita à condição $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$

Note que $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ (pois para $x \neq 0$ temos $\delta(x) = 0$ e $f(x)\delta(x) = f(x) \cdot 0 = 0$), pelo que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = f(0)$.

Mostre que (assumindo que $\delta(x)$ é para ser usado sempre num integral):

a) $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$; b) $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$; c) $\delta(-x) = \delta(x)$; d) $x\frac{d}{dx}\big(\delta(x)\big) = -\delta(x)$;

6) *Função delta de Dirac a três dimensões,* $\delta^3(\vec{r})$

Seja $\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ a função definida como: $\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0 \text{ se } \vec{r} \neq 0 \\ +\infty \text{ se } \vec{r} = 0 \end{cases}$ e ainda sujeita à condição $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz = 1$ pelo que $\int f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}-\vec{a})d\vec{r} = f(\vec{a})$.

Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{r})$ sendo $\vec{e}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ o versor radial. Consequentemente, $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\prime}{(\vec{r}-\vec{r}\prime)^3} = 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\prime)$.