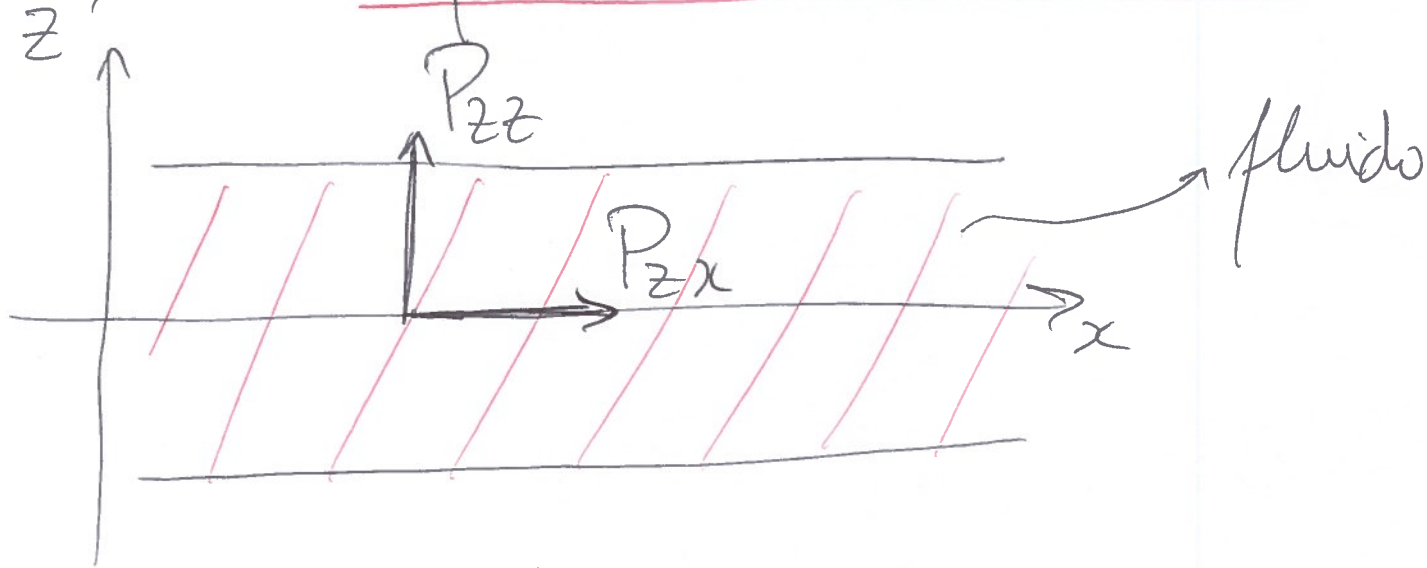


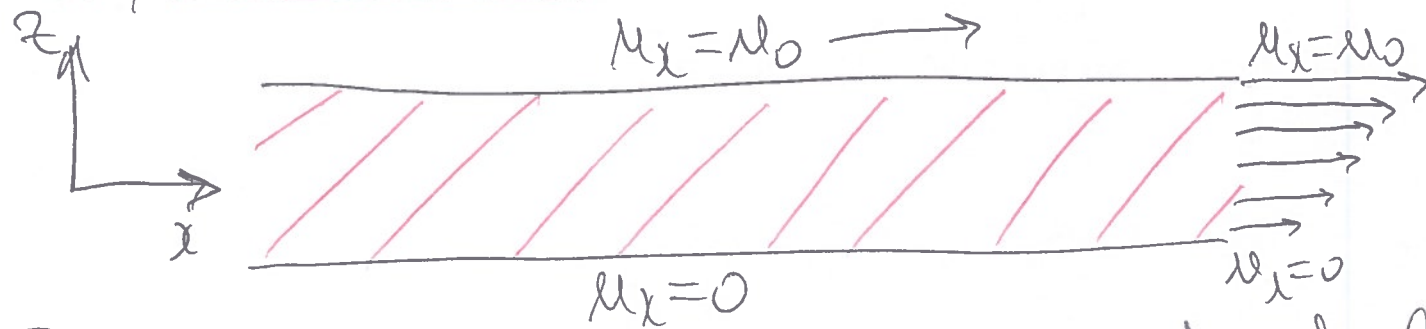
# Cálculo da viscosidade de um gás diluído

## Definição do coeficiente de viscosidade



$P_{\alpha\beta}$  é o chamado tensor das tensões e dá a força exercida, por unidade de área, segundo a direção  $\beta$  sobre o plano  $\alpha$ .  
Por exemplo,  $P_{zz}$  é simplesmente a pressão no fluido.  
Quando o fluido está em equilíbrio (i.e., em repouso ou movendo-se com velocidade uniforme por todo ele), não há tensões paralelas ao plano, i.e.  $P_{zx} = 0$ .

Considere-se, agora, uma situação em que o fluido se move ao longo de  $x$ , mas não com velocidade uniforme, i.e.  $u_x \equiv u_x(z)$ . Por exemplo, se o fluido estiver contido entre duas placas, estando uma parada e a outra a mover-se com velocidade constante  $u_0$  segundo  $x$ . Assumindo que não há escorregamento entre as placas e o fluido, as camadas de  $z$  adjacentes às placas terão as mesmas velocidades de  $x$ . Entre as placas, diferentes camadas de fluido terão diferentes velocidades  $u_x$ , entre 0 e  $u_0$ .



Para um dado plano  $z = ct$ , a camada de fluido imediatamente abaixo exercerá sobre o fluido imediatamente acima uma tensão tangencial  $P_{zx}$ . Como  $P_{zx} = 0$  quando  $\partial u_x / \partial z = 0$  (ou seja, quando o fluido está em repouso ou se move todo ele com a mesma velocidade), é de esperar que  $P_{zx}$  seja uma função das derivadas de  $u_x$  em ordem  $z$ , e se anule quando  $u_x$  não depende de  $z$ .

Supondo que  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  é uma quantidade relativamente pequena, o primeiro termo num desenvolvimento em série de potências da função  $P_{zx}$  será uma boa aproximação, ou seja, ter-se-á uma relação linear

$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

onde a constante de proporcionalidade  $\eta$  é o chamado coeficiente de viscosidade. Se  $\frac{\partial u_x}{\partial z} > 0$ , o fluido abaixo do plano  $z = \text{cte}$  tende a retardar o fluido que está acima do plano, exercendo sobre este uma força no sentido negativo do eixo dos  $x$ 's, ou seja,  $P_{zx} < 0$  se  $\frac{\partial u_x}{\partial z} > 0$ , donde o sinal — na expressão acima, por forma a ter  $\eta$  como uma quantidade positiva.

No sistema internacional,  $\eta$  tem as unidades de  $\text{Pa s} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1} = 10 \text{ P}$ , com P um 'poise', em honra de Poiseuille.

A relação de proporcionalidade entre  $P_{zx}$  e  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  é bem verificada em líquidos e gases, se o gradiente de velocidade não for muito elevado.

Paralelamente, então, ao cálculo do coeficiente de viscosidade.

Para gases diluídos,  $\eta$  pode ser calculado de forma simples com base em considerações microscópicas de teoria cinética. Fisiologicamente, porque é que aparece uma tensão  $P_{ex}$  (i.e., uma força por unidade de área) devido ao facto de  $\partial u_x / \partial z = 0$ ? Devido à colisão, as moléculas do gás estão constantemente a cruzar o plano  $z = cte$ , ao cruzarem o dito plano, transportam com elas o momento direccionado segundo  $x$  que possuem. Ora, as moléculas que cruzam o plano de cima para baixo transportam mais momento segundo  $x$  (vem de uma região onde  $u_x$  é maior) do que as moléculas que cruzam o plano de baixo para cima.

Por outras palavras, o gás abaixo do plano ganha momento direccionado segundo  $x$ , enquanto que o gás acima do plano perde este tipo de momento. Como uma variação de momento por unidade de tempo corresponde a uma força, o gás abaixo do plano exerce uma força sobre o gás acima deste.

Por exemplo, assim, ao aumento médio, por unidade de tempo e por unidade de área do plano  $z = z_0$ , da componente  $x$  do momento do gás acima do plano, devido ao transporte líquido de momento pelas moléculas que atravessam o dito plano.

Uma molécula que atravessa o plano  $z = z_0$  para a camada de fluido imediatamente acima em consequência de uma colisão recente, após esta e na direção  $z$ , uma distância que, em média, é igual a um livre percurso médio  $l$ . Quer isto dizer que a velocidade segundo  $x$  com que ela atravessa aquele plano é a que tinha em  $z - l$ . Assim sendo, o momento direcionado segundo  $x$  que ela transporta ao atravessar o plano de baixo para cima é dado por  $m u_x(z - l)$ . De forma análoga, o momento segundo  $x$  transportado por uma molécula que atravessa o plano da camada de fluido imediatamente abaixo deste é  $m u_x(z + l)$ .

Resta estimar quantas moléculas atravessam aquele plano, por unidade de área e por unidade de tempo, em cada um dos sentidos.

Se for  $n_{z+}$  a densidade de moléculas com velocidade no sentido crescente de  $z$ , o fluxo de moléculas que atravessa o plano  $z = \text{cte}$  de baixo para cima é  $n_{z+} \bar{v}$ , com  $\bar{v}$  a velocidade média das moléculas no gás.

Ora, como em média  $1/3$  das moléculas do gás tem velocidade segundo  $z$  e, destas, metade tem velocidade segundo  $+z$  (a outra metade terá velocidade segundo  $-z$ ), tem-se grosso modo  $n_{z+} \approx (1/2)(1/3)n = n/6$ , e o fluxo de partículas que atravessa o plano  $z = \text{cte}$  é aproximadamente dado por  $n\bar{v}/6$ . Cada molécula destas transporta um momento  $m u_x(z-l)$ , e o momento médio segundo  $x$  transportado, por unidade de área e por unidade de tempo, através daquele plano e de baixo para cima é:

$$\frac{1}{6} n \bar{v} m u_x (z-l)$$

Da mesma forma, o momento médio segundo  $x$  transportado de cima para baixo, por unidade de área e por unidade de tempo, é:

$$\frac{1}{6} n \bar{v} m u_x (z+l)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P_{zx} &= \frac{1}{6} m n \bar{v} [\mu_x(z-l) - \mu_x(x+l)] \approx \\ &\approx \frac{1}{6} m n \bar{v} [\cancel{\mu_x(z)} - \frac{\partial \mu_x}{\partial z} l - \cancel{\mu_x(x)} - \frac{\partial \mu_x}{\partial z} l] = \\ &= -\frac{1}{3} m n \bar{v} l \frac{\partial \mu_x}{\partial z} \equiv -\eta \frac{\partial \mu_x}{\partial z} \end{aligned}$$

com o coeficiente de viscosidade

$$\eta = \frac{1}{3} m n \bar{v} l$$

tendo-se assim chegado a uma expressão aproximada explícita para  $\eta$  em termos dos parâmetros microscópicos que caracterizam as moléculas do gás. O factor  $1/3$  não se toma muito a sério, mas a dependência de  $\eta$  nos parâmetros  $m, n, \bar{v}$  e  $l$  deve ser a correcta.

Lembrando que

$$l \approx \frac{1}{\sqrt{2} n \bar{v}_0}$$

vem

$$\eta \approx \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{m}{\bar{v}_0} \bar{v}$$

que não depende da densidade  $n$ . Contudo, depende da temperatura através de

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k_B T}{m}}$$

ou, o que é essencialmente o mesmo dentro do cálculo aproxima-  
do efectuado,

$$\bar{v} \approx \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

dado pela equipartição de energia. Não dependendo de  $n$ ,  
também não depende da pressão  $P = nk_B T$  do gás.



A nova dependência de  $\eta$  na densidade é surpreendente, pois poderia esperar-se que a força tangencial transmitida pelo gás fosse proporcional ao número de moléculas presentes. O paradoxo aparente é resolvido tendo em conta que, se o número de moléculas é duplicado, há duas vezes mais moléculas para transportar momento através do plano  $z = \text{cte}$ , mas o livre percurso médio é dividido por dois, o que reduz a metade a eficiência do transporte de momento. O resultado líquido destes dois efeitos é que a taxa à qual ocorre a transferência de momento permanece inalterada. O facto de a viscosidade de um gás a uma dada temperatura ser independente da densidade foi obtido inicialmente por Maxwell em 1860, que também o confirmou experimentalmente.

Note-se, contudo, que tal resultado ( $\eta$  independente de  $n$ ) não permanecerá válido para um intervalo arbitrariamente largo de densidades. De facto, foram feitas duas hipóteses ao derivar aquele resultado:

1) O gás é suficientemente diluído para que seja desprezável a probabilidade de mais do que duas moléculas se aproximem simultaneamente o suficiente para que interajam apreciavel- mente entre elas. Esta aproximação é justificável se a densidade  $n$  for suficientemente baixa para que

$$l \gg d \sim \sqrt{\sigma_0}$$

com  $d$  uma medida do diâmetro molecular.

2) O gás é suficientemente denso para que as moléculas colidam predominantemente com outras moléculas e não com as paredes do recipiente, ou seja,  $n$  deve ser suficientemen- te elevado para que

$$l \ll L$$

em que  $L$  é uma medida da dimensão linear do reci- ente (l.g.; o espaçamento entre as placas).

Se o gás se torna de tal maneira diluído que esta última condição não é verificada, então a viscosidade deve diminuir, pois no caso limite em que  $n \rightarrow 0$  (um vácuo perfeito) a força tangencial deve claramente ir para zero. Neste limite,  $\eta \sim L$ . Apesar de tudo, o intervalo de densidades para as quais aquelas duas condições são verificadas em simultâneo é bastante largo, pois tem-se  $L \gg d$  na maior parte das experiências macroscópicas. O coeficiente de viscosidade  $\eta$  de um gás é, pois, independente da densidade numa gama muito grande de condições.

Esta discussão pode ser reformulada em termos mais quantitativos: a probabilidade total por unidade de tempo,  $Z^{-1}$ , de que uma molécula sofra uma colisão pode ser escrita como a soma das probabilidades por unidade de tempo de que a molécula colida com outras moléculas,  $Z^{-1}$ , ou de que colida com as paredes do recipiente,  $Z_w^{-1}$ .

de seja,

$$\underline{z_0^{-1} = z^{-1} + z_w^{-1}}$$

O que, com  $\underline{z^{-1} = \bar{v}/l}$  e também  $\underline{z_w \approx L/\bar{v}}$ , dá para o livre percurso médio total  $\underline{l_0 \equiv \bar{v} z_0}$

$$\underline{\frac{1}{l_0} = \frac{1}{l} + \frac{1}{L} \approx \sqrt{3} m \bar{v}_0 + \frac{1}{L}}$$

É este valor  $\underline{l_0}$  que deve ser usado na expressão para  $\eta$  por forma a ter em conta, de forma aproximada, as colisões com as paredes:

$$\underline{\eta \approx \frac{1}{3} m n \bar{v} l_0 \approx \frac{1}{3} \frac{m n \bar{v}}{\sqrt{3} m \bar{v}_0 + L^{-1}}}$$

A densidades suficientemente baixas,  $\underline{l_0 \rightarrow L}$  e  $\underline{\eta \propto m}$ . No limite de muitíssimas baixas densidades, quando  $\underline{l \gg L}$  (tendo um chamado gás de Knudsen) o conceito de viscosidade já não faz sentido.

A razão é que as colisões das moléculas com as paredes retornam de tal maneira importantes que fatores geométricos que dependem da forma do recipiente tem de ser tidos em conta.

Tendo agora a dependência de  $\eta$  na temperatura, se a seção eficaz  $\sigma_0$  for semelhante à de esferas rígidas (i.e., constante e independente de  $T$ ), a dependência de  $\eta$  em  $T$  é a mesma de  $\bar{v}$ .

$$\eta \propto \bar{v} \propto T^{1/2}$$

De forma mais geral  $\sigma_0 \equiv \sigma_0(\bar{v})$ , com a velocidade relativa média dependente de  $T$  na forma  $\bar{v} \propto T^{1/2}$ . O resultado é que  $\eta$  tende a variar com  $T$  de forma mais pronunciada que  $T^{1/2}$ .

$\eta \propto T^{0.7}$ . A razão física é que, além da interação repulsiva a curtas distâncias, há também uma interação atrativa a longas distâncias entre as moléculas, a qual tende a aumentar a probabilidade de colisões de uma molécula com outra.

Ora, esta interacção atractiva é mais efectiva a baixas temperaturas, quando as moléculas têm baixas velocidades e são mais facilmente deflectadas. Dito de outra forma,  $\sigma_0$  tende a diminuir quando a temperatura aumenta. Desta forma, com  $\eta \propto T^{1/2}/\sigma_0$ , quando a temperatura aumenta,  $\eta$  tende a aumentar mais rapidamente que  $T^{1/2}$ .

Quanto a estimativas, lembrando que  $P = (2/3)m\bar{v}^2/2$   $\eta$  pode ser escrito como

$$\eta = \frac{P}{\bar{v}} l = \frac{P}{\bar{v} l}$$

O que significa que a tensão é igual à pressão do gás se  $\partial x \eta / \partial z = \bar{v} l$ .

Para  $N_2$  a pressão atmosférica de  $10^5 \text{ Pa}$  e à temperatura ambiente de  $300 \text{ K}$ , tem-se  $\bar{v} \approx 500 \text{ m/s}$  e  $l \approx 3 \times 10^{-7} \text{ m}$ ,  
donde

$$\eta \approx \frac{10^5}{1.7 \times 10^9} \approx 6 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$$

O valor medido para  $N_2$  a esta temperatura é de  $1.78 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$

Combinando

$$\eta \approx \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{m}{\sigma_0} \bar{v}$$

com

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k_B T}{m}}$$

vem

$$\eta \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma_0} = 0.377 \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma_0}$$