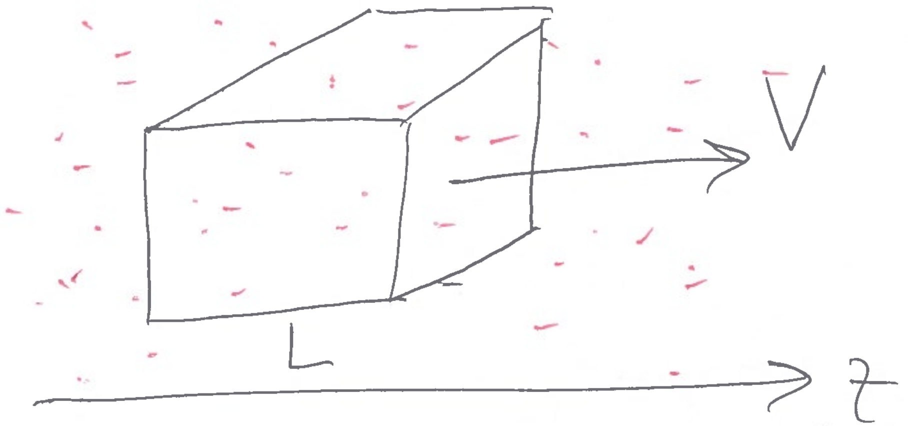
Força de retardamento sobre um satélite no espaço exterior (Reif, prob. 12-16)

Considere um satélite de massa M, com a forma de um cubo de lado L, que se move no espaço exterior com uma velocidade V paralela a uma das suas arestas. O gás circundante é constituído por moléculas com massa $m \ll M$, encontrando-se à temperatura T e possuindo uma densidade muito baixa, tal que o livre percurso médio das suas moléculas é muito maior que L. Considere ainda que as colisões das moléculas do gás com o satélite são elásticas, e que a velocidade média $\bar{v}$ daquelas é tal que $\bar{v} \gg V$.

Pretende-se calcular a força de retardamento exercida sobre o satélite pelo gás interplanetário e, na ausência de forças externas, o tempo que a velocidade do satélite demora a reduzir-se a metade.

Sendo o livre percurso médio das moléculas muito maior que as dimensões do satélite, aquelas vão praticamente colidir só com este e cada colisão molécula-satélite pode ser tratada independentemente de todas as outras moléculas.



Considerem-se as moléculas que colidem com a face anterior do satélite (que, portanto, se movem no sentido negativo do eixo dos z's) e que têm velocidade entre v_z e v_z+dv_z. A velocidade relativa destas moléculas em relação ao satélite é $-v_z+V$ (ou $|v_z|+V$) e, se for $dn(v_z)$ a densidade destas moléculas, a quantidade destas que vai colidir com o satélite por unidade de tempo é $dn(v_z)(-v_z+V)L^2$.

Numa colisão elástica com uma destas moléculas, o satélite vê o seu momento linear variar de uma quantidade $2\mu(-v_z+V)$, em que $\mu \equiv mM/(m+M) \simeq m$ é a massa reduzida. Sendo assim, a força exercida por estas moléculas na face anterior do satélite é

$$\boxed{dF_{ant} = 2\mu(-v_z+V)\,dn(v_z)\,(-v_z+V)L^2 = 2\mu L^2(-v_z+V)^2\,dn(v_z) \underset{|v_z|\approx\bar{v}\gg V}{\simeq} 2\mu L^2(v_z^2-2v_zV)\,dn(v_z)}$$

Sendo a força total nesta face:

$$\boxed{F_{ant} = \int dF_{ant} \simeq 2\mu L^2 \int_{-v_z+V>0} (v_z^2-2v_zV)\,dn(v_z) =}$$

$$\boxed{= 2\mu L^2 \int_{-\infty}^{V} (v_z^2-2v_zV)\,dn(v_z) \underset{\bar{v}\gg V}{\simeq} 2\mu L^2 \int_{-\infty}^{0} (v_z^2-2v_zV)\,dn(v_z)}$$

Ora, relembrando a definição de função de distribuição,

$$dn(v_z) = f(v_z)\,dv_z$$

donde

$$F_{ant} \simeq 2\mu L^2 \int_{-\infty}^{0} (v_z^2 - 2v_z V) f(v_z)\,dv_z =$$

$$= 2\mu L^2 \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 f(v_z)\,dv_z - 4\mu L^2 V \int_{-\infty}^{0} v_z f(v_z)\,dv_z =$$

$$= \mu n \overline{v_z^2} L^2 - 4\mu L^2 V \int_{-\infty}^{0} v_z f(v_z)\,dv_z$$

em que o primeiro termo é simplesmente a força de pressão exercida pelo gás numa parede quasi-estacionária (i.e., $\bar{v} \gg V$):

$$\mu n \overline{v_z^2} L^2 = \frac{1}{3}\mu n \overline{v^2} L^2 = \frac{2}{3} n \frac{1}{2}\mu v^2 L^2 \simeq \frac{2}{3} n \frac{1}{2} m v^2 L^2$$

quando $m \ll M$ e, consequentemente, $\mu \simeq m$.

A força exercida pelo gás na face posterior do satélite é calculada de forma em tudo análoga, mas a velocidade relativa é, agora, $v_z - V$, respeitante às moléculas que se movem no sentido positivo do eixo dos z's:

$$F_{post} \simeq \mu n \overline{v_z^2} L^2 - 4\mu L^2 V \int_0^\infty v_z f(v_z)\, dv_z$$

A força total de retardamento vem, então, com $f(-v_z) = f(v_z)$,

$$F_{ret} = F_{ant} - F_{post} \simeq 8\mu L^2 V \int_0^\infty v_z f(v_z)\, dv_z$$

Assumindo uma Maxwelliana, i.e. $f(v_z) = n\,(m/2\pi k_B T)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\frac{m v^2}{k_B T}}$,

$$F_{ret} \simeq 8\mu L^2 V n \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}} \int_0^\infty x\, e^{-x^2} dx =$$

$$= 4\mu L^2 V n \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}\,\frac{1}{2} = 2\mu n \overline{v} V L^2 \simeq 2 m n \overline{v} V L^2$$

Para calcular o tempo que o satélite demora a reduzir a sua velocidade a metade:

$$M\frac{dV}{dt} = -F_{net} = -2mn\bar{v}VL^2$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{2mn\bar{v}L^2}{M}dt$$

ou

$$V(t) = V_0\, e^{-(2mn\bar{v}L^2/M)t}$$

donde, para $V(t_{1/2}) = V_0/2$,

$$t_{1/2} = \frac{M\ln 2}{2mn\bar{v}L^2}$$