GÁS IDEAL NÃO-RELATIVISTA (Ref; prob. 9.5 e 9.6)

Considere-se um gás ideal de partículas não-relativistas dentro de um recipiente cúbico de aresta L e na ausência de qualquer campo de forças. Pretende-se calcular a pressão do gás e a respectiva dispersão!

A energia $\mathcal{E}_s$ de uma partícula do gás que ocupa o estado s é:

$$\mathcal{E}_s = \frac{p_s^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_s^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2}\right) \propto V^{-2/3}$$

A contribuição desta partícula para a pressão do gás é:

$$p_s = -\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial V} \propto \frac{2}{3} V^{-5/3} = \frac{2}{3V} V^{-2/3}$$

ou

$$p_s = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}_s}{V}$$

A pressão macroscópica do gás é a média dos diferentes p_s calculada com a função de distribuição das partículas pelos diferentes estados (ou respectivas ocupações médias):

$$\boxed{\overline{P} \equiv \sum_s \overline{n}_s p_s = \frac{2}{3} \frac{\sum_s \overline{n}_s \varepsilon_s}{V} = \frac{2}{3} \frac{\overline{E}}{V}}$$

independentemente de a estatística ser MB, BE ou FD.

Note-se que, se o gás não for monoatómico, $\overline{E}$ é o valor médio da energia cinética translacional do gás (i.e., associada ao movimento de translação dos centros de massa das moléculas).

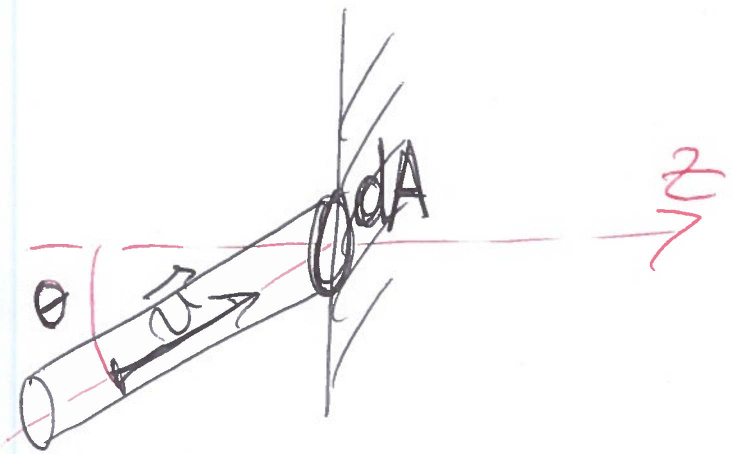
Relembre-se ainda que, no caso dos fotões (gás relativista), se tem $\overline{P} = \frac{1}{3} \frac{\overline{E}}{V}$. A diferença dos casos relativista e não-relativista resulta da diferença nas respectivas relações entre energia e momento, sendo de referir que em ambos os casos, a pressão é proporcional à densidade de energia.

É construtivo calcular a pressão usando teoria cinética (i.e., efectuando o cálculo cinético da pressão) e calcular explicitamente a taxa à qual o momento das partículas é transferido para a unidade de área da parede do recipiente devido às muitas colisões daquelas contra esta.

Comece-se por relembrar que a densidade de estados translacionais entre $\vec{k}$ e $\vec{k}+d\vec{k}$ é $d^3k/(2\pi)^3$, pelo que a densidade de partículas com determinado momento $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ é

$$\frac{dN(\vec{k})}{dV} = \bar{n}(k)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

em que a ocupação média $\bar{n}(k)$ depende apenas de k (e não de $\vec{k}$) através da energia $\varepsilon=\hbar^2k^2/2m$.



O número de partículas que colidem com o elemento de área dA durante o intervalo de tempo dt e que têm determinada velocidade $\vec{v} = \hbar\vec{k}/m$ é o número de partículas que se encontra dentro do cilindro de volume

$$dV = v_z\, dt\, dA = v \cos\theta\, dt\, dA = (\hbar k/m)\cos\theta\, dt\, dA$$

Cada uma destas partículas transfere, numa colisão, a quantidade de momento

$$2p_z = 2\hbar k\cos\theta$$

A quantidade de momento transferida para o elemento de área dA durante o intervalo de tempo dt pelas partículas com vector de onda $\vec{k}$ é, assim,

$$dp_z(\vec{k}) = 2p_z \frac{dN(\vec{k})}{dV} dV$$

ou

$$dp_z(\vec{k}) = 2\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\bar{n}(k)\cos^2\theta\,\frac{\hbar^2k^2}{m}\,dt\,dA$$

O momento total transferido por todas as partículas é:

$$\int_{k_z\geq 0} dp_z(\vec{k}) = 2\int_{k_z\geq 0}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\bar{n}(k)\cos^2\theta\,\frac{\hbar^2k^2}{m}\,dt\,dA$$

A pressão, i.e., a força por unidade de área, i.e., a quantidade de momento transferida por unidade de tempo para a unidade de área, é:

$$\bar{P} \equiv \frac{\int_{k_z\geq 0} dp_z(\vec{k})}{dt\,dA} = 4\int_{k_z\geq 0}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\bar{n}(k)\cos^2\theta\,\frac{\hbar^2k^2}{2m} = 4\int_{k_z\geq 0}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\bar{n}(k)\cos^2\theta\,\varepsilon(k)$$

$$= 4\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\cos^2\theta}_{1/3}\int_0^{\infty}\frac{dk}{(2\pi)^3}\,k^2\,\bar{n}(k)\,\varepsilon(k)$$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{2}{3} 4\pi \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 \bar{n}(k) \varepsilon(k) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{n}(k) \varepsilon(k) = \frac{2}{3} \frac{\overline{E}}{V}}$$

Passemos ao cálculo da dispersão:

$$\overline{(\Delta P)^2} \equiv \overline{(P - \overline{P})^2} = \overline{P^2} - \overline{P}^2$$

Tendo-se $\overline{P} = (2/3)\,\overline{E}/V$, é imediato ver que

$$\overline{(\Delta P)^2} = \frac{4}{9} \frac{\overline{(\Delta E)^2}}{V^2}$$

Relembrando que $\overline{(\Delta E)^2} = \partial^2 \ln Z / \partial \beta^2 = -\partial \overline{E} / \partial \beta$, vem

$$\boxed{\overline{(\Delta P)^2} = -\frac{4}{9} \frac{1}{V^2} \frac{\partial \overline{E}}{\partial \beta} = -\frac{4}{9} \frac{1}{V^2} \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = \frac{4}{9} \frac{k_B T^2}{V^2} \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = \frac{2}{3} \frac{k_B T^2}{V} \frac{\partial \overline{P}}{\partial T}}$$

Para um gás ideal no limite clássico, em que $\bar{P} = Nk_BT/V$, tem-se

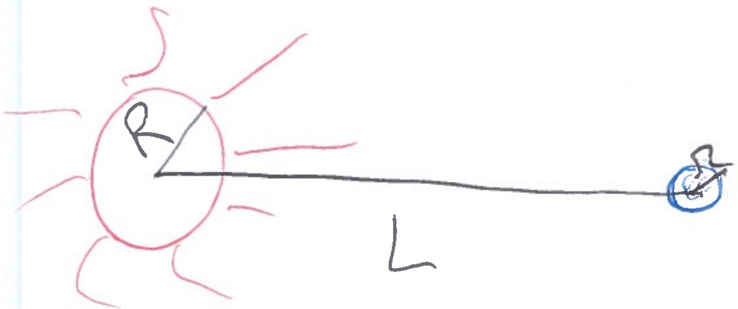
$$\boxed{\overline{(\Delta P)^2} = \frac{2}{3}\frac{Nk_B^2T^2}{V^2} = \frac{2}{3}\frac{\bar{P}^2}{N}}$$

vindo para a dispersão relativa

$$\boxed{\frac{\overline{(\Delta P)^2}}{\bar{P}^2} = \frac{2}{3N} \sim \frac{1}{N}}$$

reencontrando-se, mais uma vez, o limite termodinâmico.

EQUILÍBRIO DE RADIAMENTO SOL-TERRA (Ref: prob. 9-13)



$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W m^{-2} K^{-4}$; $r \simeq 6.37 \times 10^{6} m$

$T_0 \simeq 5778\,°K$; $R \simeq 7 \times 10^{8} m$; $L \simeq 1.5 \times 10^{11} m$

Pretende-se estimar a temperatura T à superfície da Terra, considerando esta e o Sol como corpos negros.

$$P_e = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

$$P_a = \frac{\pi r^2}{4\pi L^2} 4\pi R^2 \sigma T_0^4$$

$$P_e = P_a \implies \boxed{T = T_0 \sqrt{\frac{R}{2L}} = 279\,°K \simeq 6\,°C}$$