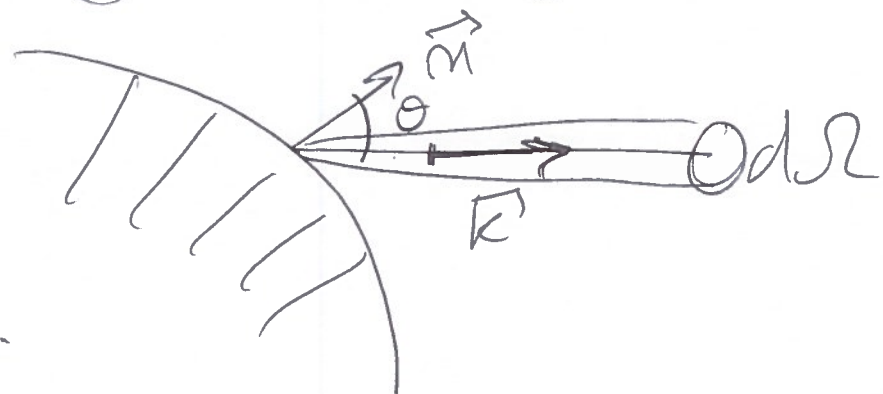


Potência radiada por um corpo quente

Seja a potência emitida, por unidade de área, na banda
 $d\omega$ (i.e., entre ω e $\omega+d\omega$) e segundo o ângulo sólido $d\Omega$:

$$\frac{d\mathcal{P}_e(\vec{k}; \alpha)}{dA} d\omega d\Omega$$



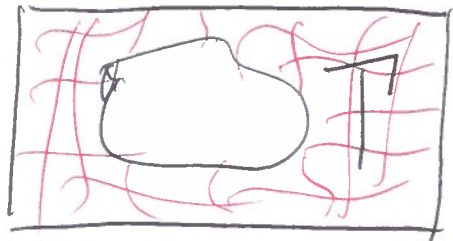
para um estudo de polarização α .

Esta grandeza física depende da estrutura microscópica
do corpo (i.e., da sua estrutura atômica ou molecular) e é
praticamente impossível de calcular de forma directa.

Além de emitir, o corpo está também a absorver

$$a(\vec{k}; \alpha) \frac{d\mathcal{P}_i(\vec{k}; \alpha)}{dA} d\omega d\Omega, \quad a(\vec{k}; \alpha) \text{ é o coeficiente de absorção.}$$

Considere-se, então, o corpo contido numa cavidade e
imerso em radiações, tudo em equilíbrio térmico
a uma temperatura T . É óbvio que, em equilíbrio:



$$\begin{aligned} \text{Potência total radiada} &= \\ &= \text{Potência total absorvida} \end{aligned}$$

Mas imagine-se, agora, que cobriamos todo o corpo com uma
película que impede toda a troca de radiações, excepto num
pequeno elemento de superfície dA e que deixa passar apenas
uma banda de frequência entre ω e $\omega + d\omega$, para uma dada
polarização α , e segundo um ângulo no lado $d\Omega$ em torno
da direcção \vec{K} . A situação de equilíbrio seria atingida
à mesma, no ~~que~~ para os dA , ω , α , $d\Omega$ e \vec{K} particulares
referidos acima, i.e. seria atingida de forma detalhada.

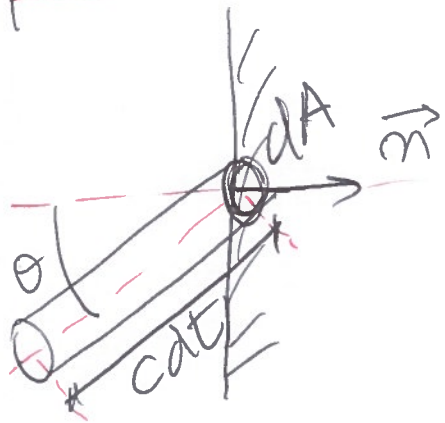
É o chamado princípio do balanço detalhado: o equilíbrio entre potência radiada e potência absorvida não é efetuado de forma integrada, mas de forma detalhada, ou seja,

$$\frac{d\mathcal{P}_e(\vec{k}; \alpha)}{dA} = a(\vec{k}; \alpha) \frac{d\mathcal{P}_i(\vec{k}; \alpha)}{dA}$$

Para o chamado corpo negro, que absorve toda a radiação que nele incide, $a(\vec{k}; \alpha) \equiv 1$.

De referir que, enquanto $d\mathcal{P}_e(\vec{k}; \alpha)/dA$ e $a(\vec{k}; \alpha)$ dependem fortemente do corpo em questão, a razão entre as duas quantidades é independente do corpo, pois é igual a $d\mathcal{P}_i(\vec{k}; \alpha)/dA$, que depende apenas à radiação incidente e aos radiaamentos dentro de uma cavidade em equilíbrio térmico com a matéria a uma dada temperatura, cujas características já conhecemos bem! Chegamos assim à radiação emitida por um corpo investigando as condições que tornam as suas propriedades consistentes com a mesma formal situação de equilíbrio.

Assim sendo, o tempo de calcular a potência de radiação incidente por unidade de área:



Relembrando que $2 f(k; T) d^3K$ é a densidade de fótons com vetor de onda entre \vec{k} e $\vec{k} + d\vec{k}$ em ambas as direções de polarização, o número de fótons que incide em dA durante dt vem:

$$2 f(k; T) d^3K c \omega dt dA$$

Com $d^3K = k^2 \sin \theta d\theta dk$, o número de fótons com número de onda entre k e $k + dk$ (em ambas as direções de polarização) que incide em dA durante dt vem, então:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \omega \theta c 2 f(k; T) k^2 dk dt dA = \frac{c}{4} \underbrace{4\pi^2 f(k) k^2 dk}_{\bar{u}(\omega; T) d\omega/h\omega} dt dA$$

A potência incidente por unidade de área é, então, igual ao resultado de cima multiplicado por $h\omega$, dividido por dt e dividido ainda por dA .

Finalmente,

$$\frac{d\mathcal{E}_i(\omega; T)}{dA} d\omega = \frac{c}{4} \bar{u}(\omega; T) d\omega$$

o que quer dizer que, para um corpo negro, a potência radiada por unidade de área na banda entre ω e $\omega + d\omega$,

$$\frac{d\mathcal{E}_e(\omega; T)}{dA} d\omega = \frac{c}{4} \bar{u}(\omega; T) d\omega$$

conhecida como a lei de Planck para a radiação de corpo negro. Tendo $d\mathcal{E}_e(\omega; T)/dA$ a mesma forma que $\bar{u}(\omega; T)$, a lei de Wien $\lambda T = B = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$ aplica-se também ao espectro radiado por um corpo quente (i.e., com uma dada temperatura T). Uma das aplicações desta lei é a determinação da temperatura de um corpo distante (e.g., o Sol) por medição do espectro do radiado.

A lei de Wien permite ainda saber qual a ω de um corpo quente, ou seja, qual o comprimento de onda em que a potência radiada é máxima.

A potência total radiada, por unidade de área, é

$$\frac{dP(T)}{dA} = \int_0^{\infty} \frac{dP_2(\omega; T)}{dA} d\omega = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \bar{u}(\omega, T) d\omega =$$

$$= \frac{c}{4} \bar{u}(T) = \sigma T^4$$

que é a lei de Stefan. Se o corpo não for negro, ou seja, tiver uma emissividade $0 \leq \epsilon \leq 1$, corrigir-se a lei de Stefan da forma:

$$\frac{dP(T)}{dA} = \epsilon \sigma T^4$$

Cálculo clássico de $\bar{u}(\omega; T)$

A densidade de energia no campo eletromagnético obtém-se, classicamente, multiplicando a densidade de modos pela energia em cada modo:

$$\bar{u}(\omega; T) \stackrel{\text{clássico}}{=} \bar{\varepsilon}(\omega; T) \approx \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \bar{\varepsilon}(\omega; T) \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

De facto, no caso quântico e usando a distribuição de Planck:

$$\bar{\varepsilon}(\omega; T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \text{ donde } \bar{u}(\omega; T) \stackrel{\text{quântico}}{=} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Orá, cada modo do campo eletromagnético corresponde a um oscilador de frequência ω . Sabemos que, classicamente, a energia média de um oscilador é $k_B T$!

$$\bar{\varepsilon}(\omega; T) = k_B T$$

Clássicamente, então,

$$\bar{u}(\omega; T) = k_B T \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

conhecida como a lei de Rayleigh-Jeans. Desde muito cedo que se sabia que esta lei estava errada, pois conduz à chama da catástrofe do ultra-violeta, i.e., diverge a altas frequências. É mais um dos exemplos das limitações da Física clássica encontradas no final do sec. XIX: é óbvio que a densidade de energia do campo electromagnético não pode divergir para infinito.

Claro que a lei de Rayleigh-Jeans é o limite clássico da lei de Planck:

$$\bar{\epsilon}(\omega; T) = \frac{h\omega}{e^{h\omega/k_B T} - 1} \approx \frac{h\omega}{k_B T}$$

$$\approx \frac{h\omega}{k_B T} \approx k_B T$$



Teorema de equipartição (generalizado)

Este teorema é do âmbito do limite clássico, em que as coordenadas e os momentos generalizados podem ser tratados de forma contínua. A energia do sistema é, então, da forma:

$$E \equiv E(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)$$

Calcule-se, por exemplo, o valor médio

$$q_k \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k q_k \frac{\partial E}{\partial q_k} e^{-\beta E}}{\int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k e^{-\beta E}}$$

Primitive-se por partes o integral no numerador no variável q_k

$$\int dq_k q_k \frac{\partial E}{\partial q_k} e^{-\beta E} = -\frac{1}{\beta} q_k e^{-\beta E} \Big|_{q_k^{(s)}}^{q_k^{(t)}} + \frac{1}{\beta} \int dq_k e^{-\beta E}$$

Normalmente, nos extremos de integrais $q_k^{(-)}$ e $q_k^{(+)}$ (em muitos casos $\pm \infty$) a energia vai para infinito, ou noutros casos q_k é zero nos extremos, pelo que o termo de fronteira vem zero.

Se tal for o caso:

$$\int dq_k q_k \frac{\partial E}{\partial q_k} e^{-\beta E} = \frac{1}{\beta} \int dq_k e^{-\beta E}$$

donde

$$\overline{q_k \frac{\partial E}{\partial q_k}} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Da mesma forma se demonstra que

$$\overline{p_k \frac{\partial E}{\partial p_k}} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Vejam os alguns exemplos. Se a energia for quadrática em q_k
(ou p_k), i.e., se $E = b q_k^2$:

$$q_k \overline{\frac{\partial E}{\partial q_k}} = 2 b q_k^2 = 2 \bar{E} = k_B T$$

e

$$\bar{E} = \frac{1}{2} k_B T$$

que é o enunciado normal do teorema de equipartição de energia (na sua versão mais restrita; cf. Reif, Sec. 7.5)

É esta versão que se aplica, no limite clássico, aos
graus de liberdade que descrevem os movimentos
das moléculas dos gases.

Exemplos:

3 graus de liberdade translacionais:

$$\frac{\overline{p^2}}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

1 grau de liberdade rotacional:

$$\frac{\overline{L^2}}{2I} = \frac{1}{2} k_B T$$

1 grau de liberdade vibracional:

$$\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 = 2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

molécula de CO₂: $\overline{E} = \frac{13}{2} k_B T$; $\omega = \frac{13}{2} R$

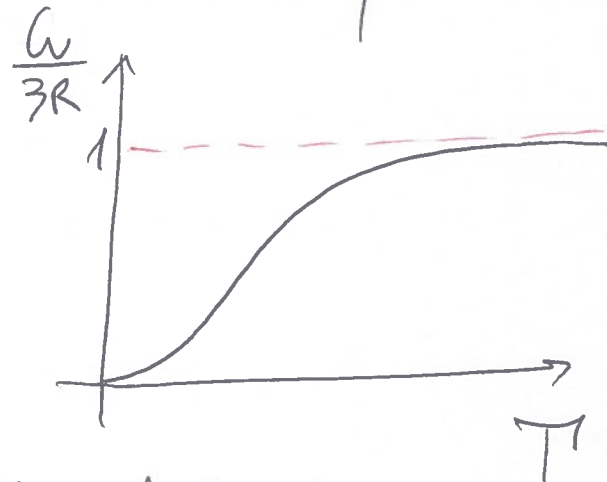
molécula de H₂O: $\overline{E} = \frac{12}{2} k_B T$; $\omega = 6R$

molécula de NH₃: $\overline{E} = \frac{18}{2} k_B T$; $\omega = 9R$

Lei de Dulong - Petit

Cálculo clássico do calor específico da rede cristalina (i.e., do sólido). Cada átomo na rede cristalina corresponde a um oscilador a 3 dimensões, pelo que N átomos na rede correspondem a $3N$ osciladores:

$$\underline{\bar{E} = 3Nk_B T} \quad \text{e} \quad \underline{u = 3R}$$



O teorema é mais geral e vai, de facto, para lá do tratamento de graus de liberdade quadráticos na energia. Por exemplo, para o valor médio da energia potencial de uma partícula num campo gravítico: $\underline{\bar{E} = mgz}$, $\underline{z \partial E / \partial z = mgz = k_B T}$, donde $\underline{\bar{E} = k_B T}$. Pode-se demonstrar que, se $\underline{E = bx^s}$ (com $s \in \mathbb{R}^*$), $\underline{\bar{E} = k_B T / s}$.