ESTATÍSTICA DOS FOTÕES: RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO

O objectivo é determinar as características do radiamento (i.e., gás de fotões) numa cavidade quando em equilíbrio térmico com a matéria que constitui as paredes da cavidade.

Como já sabemos, a ocupação média de um estado s em que o fotão tem energia E_s é dada pela distribuição de Planck

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta E_s} - 1}$$

Os fotões são os quanta do campo electromagnético, o qual obedece à equação de ondas (em espaço livre)

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

A solução geral desta equação é uma sobreposição de ondas planas da forma

$$\vec{E} = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

com $\vec{k}$ e ω relacionados pela relação de dispersão

$$|\vec{k}| = k = \frac{\omega}{c}$$

tendo-se para a energia e momento de um fotão de frequência angular ω

$$\mathcal{E}_s = \hbar\omega = \hbar k c = |\vec{p}|c$$

$$\vec{p}_s = \hbar\vec{k}$$

Em espaço livre, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, ou $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$, o que quer dizer que $\vec{E}$ é perpendicular à direcção de propagação $\vec{k}$.

Quer dizer que, para cada $\vec{k}$, há apenas duas possíveis componentes de $\vec{E}$ (ambos perpendiculares a $\vec{k}$) que podem ser especificadas. Por outras palavras, para cada $\vec{k}$ há dois fotões possíveis, correspondentes às duas possíveis direcções de polarização do campo eléctrico.

O problema de saber quantos modos próprios há numa caixa de arestas L_x, L_y e L_z (com qualquer um destes L's tal que $L \gg \lambda \equiv 2\pi/|\vec{k}|$) é em tudo análogo ao problema (já resolvido!) de saber quantos modos próprios são possíveis para uma partícula numa caixa: $d^3k/(2\pi)^3$ por unidade de volume e para uma direcção de polarização especificada.

Designe-se, então, por $f(\vec{k})\,d^3k$ o número médio de fotões por unidade de volume, com uma direcção de polarização especificada, e cujo vector de onda está entre $\vec{k}$ e $\vec{k}+d\vec{k}$.

Vem

$$f(k)\, d^3K = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega(\vec{k})} - 1} \frac{d^3K}{(2\pi)^3}$$

com $\omega \equiv \omega(\vec{k})$ através da relação de dispersão $\omega = c|\vec{k}| = cK$.
Como $f(\vec{k})$ é, na realidade, $f(k)$ (i.e., apenas função de $|\vec{k}|$), tem-se para o número médio de fotões por unidade de volume em ambas as direcções de polarização e com número de ondas entre K e $K + dK$:

$$2 f(k) (4\pi K^2 dK) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \frac{K^2 dK}{e^{\beta\hbar\omega(k)} - 1} = \frac{8\pi}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},$$

sendo esta última expressão o número médio de fotões por unidade de volume, e em ambas as direcções de polarização, com frequência angular entre ω e $\omega + d\omega$.

Nota sobre contagem de modos próprios numa cavidade

Usámos condições periódicas às fronteiras:

$$k_x L_x = 2\pi l_x, \quad l_x \in \mathbb{Z}$$

o que conduziu a

$$\Delta l_x \Delta l_y \Delta l_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

e, consequentemente, a

$$f(k)\, d^3k = \bar{n}(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad \text{e} \quad 2 f(k) (4\pi k^2 dk) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \bar{n}(k) k^2 dk$$

Mas podíamos ter usado condições fronteira de ondas estacionárias:

$$L_x = n_x (\lambda_x/2) = \pi n_x / k_x, \quad n_x \in \mathbb{N}$$

o que conduziria a

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{V}{\pi^3} d^3k$$

e, consequentemente, a

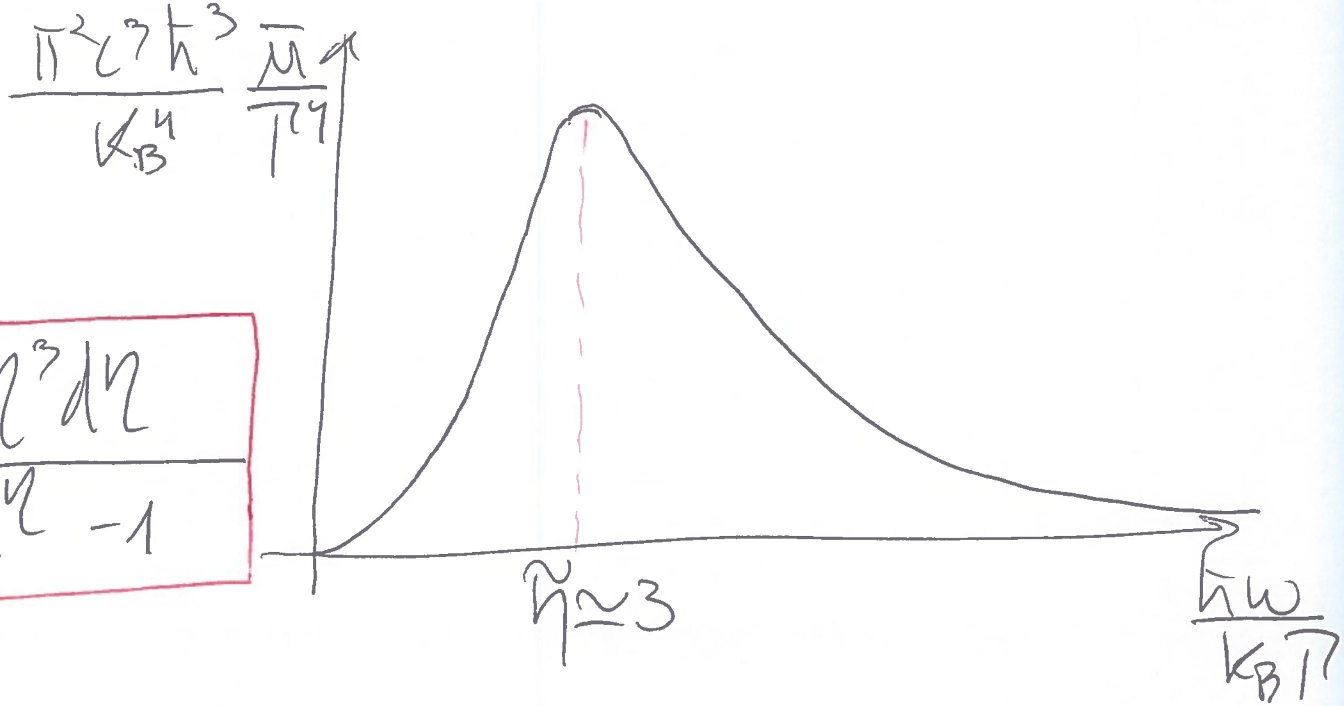
$$f(k)\, d^3k = \bar{n}(k) \frac{d^3k}{\pi^3} \quad \text{e} \quad 2 f(k) \frac{4\pi k^2 dk}{8} = \frac{8\pi}{8\pi^3} \bar{n}(k) k^2 dk$$

Tendo cada um dos fotões em $2\, f(k)\, (4\pi k^2 dk)$ uma energia $\hbar\omega$, a densidade média de energia no intervalo entre ω e $\omega + d\omega$ a uma dada temperatura T, vem então:

$$\bar{u}(\omega;T)\,d\omega = \hbar\omega \frac{8\pi}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Introduzindo o parâmetro adimensional $\eta \equiv \beta\hbar\omega = \hbar\omega/k_B T$:

$$\boxed{\bar{u}(\omega;T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \frac{\eta^3 d\eta}{e^{\eta}-1}}$$



Note-se que há uma lei de escala universal:

$$\frac{\hbar\tilde{\omega}}{k_B T} = \tilde{\eta} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{\tilde{\omega}}{T} = \text{const},$$

ou ainda, em termos do comprimento de onda,

$$\boxed{\tilde{\lambda} T = \text{const.} = B = 2.898 \times 10^{-3}\ \text{m K}},$$

conhecida como a Lei do deslocamento de Wien.

A densidade de energia no campo electromagnético a uma dada temperatura vem então:

$$\boxed{\bar{u}(T) = \int_0^\infty \bar{u}(\omega;T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(c\hbar)^3} =}$$

$$\boxed{= \frac{4}{c}\sigma T^4}, \quad \text{com } \sigma \equiv \frac{\pi^2}{60}\frac{k_B^4}{c^2\hbar^3} = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\text{K}^{-4}$$

a constante de Stefan-Boltzmann.

Note-se que $\bar{u}(T) \propto T^4$, o que é fácil de interpretar fisicamente. De facto, olhando para a distribuição de Planck, vê-se que, para $\hbar\omega \gg k_B T$, o número médio de fotões nestas frequências é muito pequeno!

$$\bar{n}(\omega) = \left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^{-1} \underset{\hbar\omega \gg k_BT}{\simeq} e^{-\hbar\omega/k_BT} \sim 0$$

Assim sendo, é de esperar que a maioria dos fotões tenha frequências tais que $\hbar\omega \lesssim k_BT$, ou números de ondas tais que $k \leq k' \equiv k_BT/\hbar c$. Ora, o número de modos próprios para os fotões com $k \leq k'$ é proporcional ao volume (no espaço $\vec{k}$) da esfera de raio k', donde o número médio de fotões com energia inferior a k_BT:

$$\bar{N} \propto k'^3 \propto T^3$$

Como a energia típica destes fotões é da ordem de k_BT, vem

$$\bar{u}(T) \propto \bar{N}\,(k_BT) \propto T^4$$

concluindo-se que a proporcionalidade em T^4 é consequência do espaço ser tridimensional!

Calculemos, agora, a pressão de radiamento (i.e., a pressão exercida pelo gás de fotões). Para tal, recordemos que, para um fotão no estado s,

$$p_s = -\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial V}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathcal{E}_s = \hbar\omega = \hbar c k = \hbar c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = 2\pi\hbar c\sqrt{\frac{l_x^2}{L_x^2}+\frac{l_y^2}{L_y^2}+\frac{l_z^2}{L_z^2}}$$

Assumindo, para simplificar, que $L_x = L_y = L_z = L = V^{1/3}$:

$$\boxed{\mathcal{E}_s = \frac{2\pi\hbar c}{L}\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_z^2} \propto V^{-1/3}}$$

donde

$$\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial V} \propto -\frac{1}{3}V^{-4/3} = -\frac{1}{3V}V^{-1/3}$$

ou

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial V} = -\frac{\varepsilon_s}{3V}$$

e

$$p_s = \frac{\varepsilon_s}{3V}$$

Para a pressão macroscópica:

$$\bar{P} \equiv \sum_s \bar{n}_s p_s = \frac{1}{3V} \sum_s \bar{n}_s \varepsilon_s = \frac{1}{3V} \bar{E}(T) =$$

$$= \frac{1}{3} \bar{u}(T)$$

Tem-se, então, a equação de estado para um gás de fotões:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{3} \bar{u}(T) = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4}$$