A FUNÇÃO $\Omega(E)$

Para os dois exemplos já analisados, calcule-se $|\Delta\Omega/\Omega|$:

$$\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right| \simeq \left|\frac{\partial\Omega}{\partial E}\frac{\Delta E}{\Omega}\right| = \frac{E}{\Omega}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial E}\right|\left|\frac{\Delta E}{E}\right|$$

Assim, para o sistema a dois níveis de energia:

$$\Omega(E) \simeq 2^N e^{-(1/2N)(E/\mu H)^2}, \quad \frac{E}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial E} \simeq -\frac{1}{N}\frac{E^2}{(\mu H)^2} = N\left(1-\frac{2m}{N}\right)^2$$

$$\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right| \simeq N\left(1-\frac{2m}{N}\right)^2\left|\frac{\Delta E}{E}\right|$$

e para o gás ideal monoatómico:

$$\Omega(E,V) \simeq B\,V^N E^{3N/2}, \quad \frac{E}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial E} \simeq \frac{3N}{2}$$

$$\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right| \simeq \frac{3N}{2}\left|\frac{\Delta E}{E}\right|$$

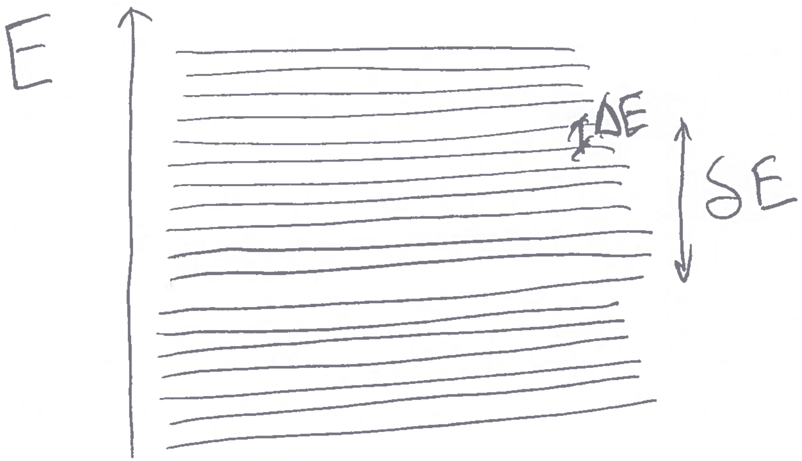
Conclui-se, então, que

i) $\ln \Omega(E) \propto N \sim f \sim 10^{23}$

ii) $\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right| \Big/ \left|\frac{\Delta E}{E}\right| \propto N \sim f \sim 10^{23}$ (excepto, no primeiro caso, perto do máximo quando $n_1 \simeq n_2 \simeq N/2$)

ou seja, $\Omega(E)$ varia muitíssimo rapidamente com a energia

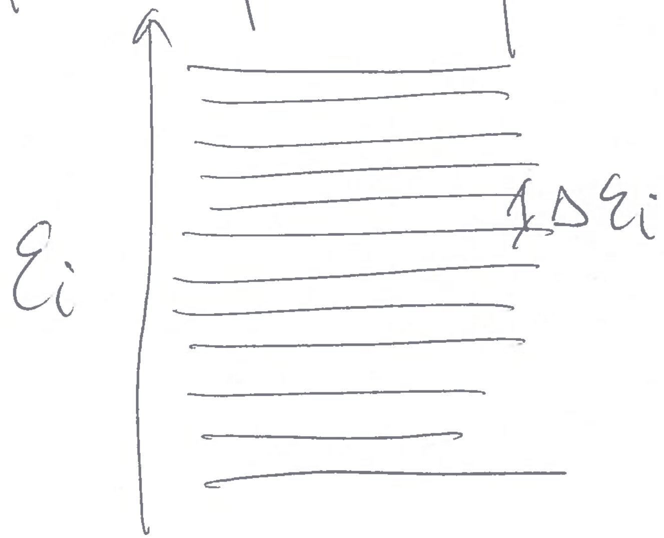
Vamos ver que, de facto, assim acontece de forma geral para um sistema macroscópico com f graus de liberdade.



$$\Delta E \ll \delta E \ll E$$

$\Omega(E)$: número de estados com energia entre E e $E+\delta E$

Comecemos por ver o que se passa com um grau de liberdade i para o qual as possíveis energias são ε_i.



Assumindo que os graus de liberdade não interagem entre si (ou fazem-no muito fracamente), tem-se

$$E=\sum_{i=1}^{f}\varepsilon_i$$

Seja $\Phi_i(\varepsilon_i)$ o número total de possíveis valores que o número quântico associado a este grau de liberdade pode assumir quando se contribui para a energia total do sistema com uma quantidade de energia não superior a ε_i. Tem-se que

$$\Phi_i(\varepsilon_i) \simeq \frac{\varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i} \propto \varepsilon_i^{\alpha}$$

($\alpha \simeq 1$. o termo de comparação é 10^{23}!)

→ espaçamento médio entre as energias

Não havendo nada, a priori, que distinga um qualquer dos graus de liberdade dos outros, eles serão tratados da mesma maneira. Então, o número total de estados (possíveis conjuntos dos f números quânticos respeitantes aos diferentes graus de liberdade) para o sistema tais que a energia deste não é superior a E é dado (...)

$$\Phi(E) \simeq \Phi_1(\varepsilon_1)\cdots\Phi_i(\varepsilon_i)\cdots\Phi_f(\varepsilon_f) \simeq [\Phi_i(\varepsilon_i)]^f$$

donde

$$\Omega(E) = \Phi(E+\delta E) - \Phi(E) \simeq \frac{\partial \Phi}{\partial E}\delta E \simeq$$

$$\simeq f\,[\Phi_i(\varepsilon_i)]^{f-1}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon_i}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial E}\delta E$$

Dividindo, mais uma vez, "o mal pelas aldeias", pode-se escrever para a energia por grau de liberdade

$$\varepsilon_i \simeq \frac{E}{f} \quad \text{(equipartição)}$$

donde $\partial \varepsilon_i/\partial E \simeq 1/f$ e

$$\Omega(E) \simeq [\Phi_i(\varepsilon_i)]^{f-1}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon_i}\delta E \underset{f\gg 1}{\simeq} [\Phi_i(\varepsilon_i)]^{f}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon_i}\delta E$$

Tendo-se ainda

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon_i} \simeq \frac{1}{\Delta \varepsilon_i} \simeq \frac{1}{\Delta E}$$

a diferença entre dois valores consecutivos de E corresponde a incrementar para o valor seguinte um dos ε_i

Então

$$\ln \Omega(E) \simeq \underbrace{f \ln \Phi_i(\varepsilon_i)}_{\sim f} + \underbrace{\cancelto{0}{\ln \frac{\delta E}{\Delta E}}}_{\sim \ln f}$$

pois, relembrando que se tem por construção $\delta E / \Delta E \gg 1$, deve-se ter

$$f^{-1} \lesssim \frac{\delta E}{\Delta E} \lesssim f$$

implicando

$$\left| \ln \frac{\delta E}{\Delta E} \right| \lesssim \ln f \ll f \sim 10^{23}$$

Se as energias ε_i's não estiverem próximas dos valores do estado fundamental, para evitar ter-se $\Phi_i = 1$,

$$\Omega(E) \simeq \left[\Phi_i(\varepsilon_i)\right]^f \sim \varepsilon_i^{\alpha f} \sim E^{\alpha f}$$

Ou seja,

$$\boxed{\Omega(E) \sim E^{\alpha f}} \quad (\alpha \approx 1)$$

Por exemplo, para o gás ideal monoatómico, $f = 3N$ e $\alpha = 1/2$.

A conclusão é que, para sistemas macroscópicos e de forma geral, $\Omega(E)$ é uma função muitíssimo rapidamente crescente da energia E.