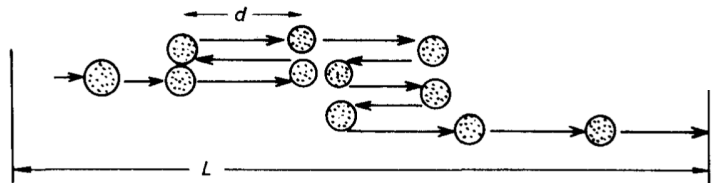


## Exercício 1:

Considere um sistema composto por um número muito grande de átomos distinguíveis, que não se movem (estão fixos numa estrutura cristalina) e não interagem. Cada um de estes átomos tem dois possíveis níveis de energia: 0,  $\epsilon$ , com  $\epsilon > 0$ . Considere que  $\bar{E}/N$  é a energia média por átomo no limite  $N \rightarrow \infty$ .

- Qual será o maior valor possível para  $\bar{E}/N$  se o sistema não estiver necessariamente em equilíbrio?
- Qual é o valor máximo de  $\bar{E}/N$  se o sistema estiver em equilíbrio?
- Para uma situação de equilíbrio termodinâmico (não necessariamente igual ao da alínea b), calcule a entropia por átomo,  $S/N$ , em função de  $\bar{E}/N$ , através da expressão  $S = k \ln \Omega(E)$ .
- Calcule a função de partição para este sistema e o valor de  $\bar{E}/N$  correspondente à situação de equilíbrio da alínea b.

## Exercício 2:



Uma banda de borracha pode ser descrita em termos de um modelo unidimensional de polímeros, que envolve  $N$  moléculas ligadas entre si. O ângulo entre moléculas pode ser  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  e a separação entre moléculas é  $d$ , como indicado na figura.

- Demonstre que o número de possíveis estados que dão um comprimento  $L = 2md$  está dado por

$$\Omega(N, m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

onde  $m$  é um número inteiro positivo.

- Para  $m \ll N$  esta expressão fica  $\Omega(N, m) \simeq g(N, 0)e^{-2m^2/N}$ . Encontre a entropia do sistema em função de  $L$  para  $N \gg 1$  e  $L \ll Nd$ .
- Encontre a força requerida para manter o comprimento  $L$  para  $L \ll Nd$ .
- Encontre a relação entre a força e o comprimento para qualquer valor de  $L$  (é dizer, sem ficar restringido às condições das alíneas b e c).

Assuma que quando a banda de borracha está submetida a uma força externa  $f$ , a energia de uma ligação a  $0^\circ$  corresponde a  $\epsilon_0 = -fa$ , e para  $180^\circ$  é de  $\epsilon_1 = fa$ .

### Exercício 3:

Considere uma rede cristalina de  $N$  átomos magnéticos idênticos de spin  $1/2$ , cada um de eles com um momento magnético  $\mu$ , submetidos a um campo magnético externo  $H$ . O sistema está em equilíbrio a uma temperatura  $T$ . Calcule:

- A função de partição do sistema.
- A entropia do sistema.
- O momento magnético médio  $\bar{M}$  e a sua flutuação  $\Delta * M = \sqrt{(M - \bar{M})^2}$ , onde  $M$  é a soma dos momentos magnéticos de todos os átomos.
- O cristal está inicialmente em equilíbrio térmico com um reservatório a temperatura  $T_i = 1 \text{ K}$ , num campo magnético externo  $H_i = 10^4 \text{ Gauss}$ . O cristal isola-se termicamente do reservatório, e o campo reduce-se a  $H_f = 100 \text{ Gauss}$ . Qual será a temperatura final? Considere que o processo é quasiestático.

### Exercício 4:

Considere um gas ideal cuja entropia está dada pela expressão

$$S = \frac{\nu}{2} \left[ \sigma + 5R \ln \frac{E}{\nu} + 2R \ln \frac{V}{\nu} \right]$$

Onde  $\sigma$  é uma constante e  $E$  a sua energia interna.

- Derive a expressão da energia interna em função da temperatura para este gas.
- Calcule a capacidade calorífica a volume constante para este gas.
- Derive a relação entre  $C_p$  e  $C_v$ .
- Calcule  $C_p$ .

### Exercício 5:

Um gas, descrito pela equação de estado é  $p = \frac{RT\nu}{V} \left( 1 + B_2 \frac{N}{V} \right)$ , expande-se livremente

entre um volume inicial  $V_0$  e um volume final  $V_f = 1.5V_0$ . Assumindo que a capacidade calorífica do contentor é desprezável, que o sistema está isolado adiabaticamente e que para as temperaturas nas que se efectua a experiência  $B_2$  é aproximadamente constante:

- Demonstre que  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_E = \frac{-1}{C_v} \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_C - p \right]$
- Qual será a variação de temperatura do gas nesta expansão?
- Calcule a variação de entropia do gas neste processo.

## Exercício 6:

A diferença de temperatura entre a superfície e o fundo da água de uma barragem pode alcançar  $10^{\circ}\text{C}$ . Assumindo que a altura da água é de 110 m, e que se constrói uma máquina térmica que utiliza esta diferença de temperatura, compare o trabalho que se poderia extrair por grama de água utilizando a máquina térmica, com a energia que se consegue através da caída da água na barragem. Assuma que a temperatura na superfície da água é de 300 K, e que o calor específico da água é de  $4,18 \text{ J/gK}$ .

## Exercício 7:

É possível construir Centrais Eléctricas aproveitando a diferença de temperatura entre a superfície e o fundo do mar. Em 1979 foi construído um protótipo no Hawaii, onde a temperatura à superfície é de  $30^{\circ}\text{C}$  e a do fundo  $18^{\circ}\text{C}$ .



Admita que este protótipo funciona como uma máquina de Carnot, permitindo a produção de 500MW de potência eléctrica.

- Calcule o rendimento deste protótipo de Central Eléctrica.
- Faça um esboço dos diagramas  $(p, V)$  e  $(T, S)$  deste ciclo, assinalando as transformações em que a Central realiza/recebe trabalho e as transformações em que fornece/recebe calor.
- Calcule a potência térmica extraída das águas superficiais.
- Calcule a potência térmica libertada para as águas profundas.
- Calcule a variação de entropia, por unidade de tempo, das águas superficiais, das águas profundas e da Central.

## Exercício 8:

Considere uma máquina frigorífica que opera entre as temperaturas de  $-10^{\circ}\text{C}$  e  $25^{\circ}\text{C}$ . Durante 1/2 hora o fluído recebe  $10^6 \text{ J}$  do congelador. Admita que a máquina funciona reversivelmente.

- Calcule a eficiência da máquina.
- Calcule o valor da energia mecânica fornecida à máquina e da energia térmica cedida à fonte quente, durante 1/2 hora.
- Calcule o valor da potência indicada pelo fabricante para a máquina.

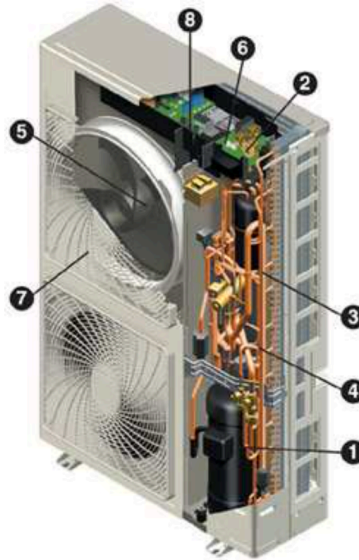


## Exercício 9:

Pretende-se manter uma sala a  $22^{\circ}\text{C}$ , num dia de inverno em que a temperatura média do ar exterior é de  $6^{\circ}\text{C}$ . Para isso dispõe-se de uma bomba de calor de  $1000\text{W}$  de potência. Admita que a sala perde calor a uma taxa de  $4,5 \times 10^3 \text{ kJ h}^{-1}$ .

Observa-se que a bomba de calor só funciona 15 minutos, em cada período de uma hora. Nesse período...

- Calcule a energia consumida (trabalho) pela bomba. Calcule o calor que a bomba retira ao ambiente. Calcule a eficiência da bomba de calor.
- Calcule a variação da entropia do Universo devido ao funcionamento da bomba e conclua acerca da reversibilidade do seu funcionamento.
- Calcule a energia consumida por uma bomba de calor reversível, com a mesma capacidade de aquecimento.



## Exercício 10:

Os três estados de mais baixa energia de certa molécula são  $\epsilon_1 = 0$ ;  $\epsilon_2 = \epsilon$ ;  $\epsilon_3 = 10\epsilon$ .

Considere um sistema macroscópico de  $N$  moléculas de esta substância.

- Calcule a função de partição para uma molécula de esta substância.
- Para uma certa temperatura  $T_0$ , calcule o número médio de átomos que há no segundo estado de energia.
- Demonstre que para uma certa temperatura o terceiro nível deixa de estar populado e estime a ordem de grandeza de essa temperatura.
- Calcule a energia média por molécula.
- Calcule a capacidade calorífica para um mole de esta substância a alta temperatura (é dizer, quando  $kT \gg \epsilon$ ).

## Soluções:

1) a)  $\bar{E}/N = \epsilon$

b)  $\bar{E}/N = \epsilon/2$

c)  $S/N = k \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{E}/(N\epsilon)} \right) + \frac{\bar{E}}{N\epsilon} \ln \left( \frac{N\epsilon}{\bar{E}} - 1 \right) \right]$

d)  $Z = (e^{-\epsilon/(KT)} + 1)^N$

2) b)  $S = k \ln g(0, N) - \frac{kL^2}{2d^2N}$

c)  $F = -kT \frac{L}{d^2N}$

d)  $L = \bar{l}N = Nd \tanh \left( \frac{fa}{kT} \right)$

3) a)  $Z = (e^{\mu H/(KT)} + e^{-\mu H/(KT)})^N$

b)  $S = Nk \ln (e^{\mu H/(KT)} + e^{-\mu H/(KT)}) - \frac{\mu H}{T} \tanh \left( \frac{\mu H}{KT} \right)$

c)  $M = N\bar{m} = N\mu \tanh \left( \frac{\mu H}{kT} \right)$

$$\Delta^* M = \sqrt{(M - \bar{M})^2} = \frac{\mu}{\cosh[\mu H/(kT)]}$$

d)  $T_f = 0.01 K$

4) a)  $E = \frac{5}{2} \nu RT$ ; b)  $C_v = \frac{5}{2} \nu R$ ; c)  $C_v = C_p - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$  d)  $C_p = \frac{7}{2} \nu R$

5) b)  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_E = 0 \rightarrow \Delta T = 0$ ; c)  $\Delta S = R \nu \ln 1.5 + 1.4 \frac{R \nu B_2 N}{V^3}$

6)  $W_{termica} = 1,39 J$ ,  $E_{grav} = 1,078 J$

7) a)  $\eta = 0.04$

c)  $\Delta Q_1/\Delta t = 1,25 \times 10^4 MW$

d)  $\Delta Q_2/\Delta t = 12 \times 10^4 MW$

f)  $\Delta S_{Tot} = 0$ ,  $\Delta S_{R1}/\Delta t = 41,2 J/sK$ ,  $\Delta S_{R2}/\Delta t = -41,2 J/sK$

8) a)  $\eta = Q_2/W_{ext} = 7.5$

b)  $Q_1 = 1,13 \times 10^6 J$

c)  $\Delta W/\Delta t = 73,9 W$

9) a)  $W = 9 \times 10^5 J$ ,  $Q_2 = 3,6 \times 10^6 J$ ,  $\eta_{frig} = Q_2/W_{ext} = 40$

b)  $\Delta S = 2,35 \times 10^3 J/K$ , irreversível

c)  $W = 2,07 \times 10^5 J$

10) a)  $Z = 1 + e^{-\epsilon/kT} + e^{-10\epsilon/kT}$ , b)  $N_2 = N/(1 + e^{\epsilon/kT} + e^{9\epsilon/kT})$ ; c) Quando  $N \simeq 1 + e^{9\epsilon/kT} + e^{10\epsilon/kT}$ ,  $N_3$  passa a ser menor que 1, i.e. para  $T \sim \frac{10\epsilon}{k \ln N}$ ,

d)  $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon(e^{-\epsilon/kT} + 10e^{-10\epsilon/kT})}{1 + e^{-\epsilon/kT} + e^{-10\epsilon/kT}}$ , e)  $C_v \simeq \frac{182}{9} R \left( \frac{\epsilon}{kT} \right)^2$