TÉCNICO LISBOA

Propagação & Antenas

Docente Responsável: **Prof. Carlos R. Paiva**

Duração: 45 minutos **22 de Outubro de 2021**

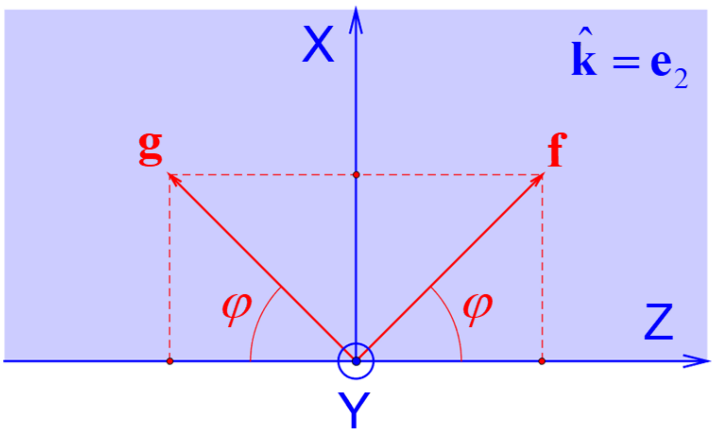
Ano Lectivo: 2021 / 2022 **SEGUNDO MAP45**

Uma onda plana e monocromática TEM propaga-se ao longo do eixo Y, i.e., tem-se $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_2$. O campo eléctrico (instantâneo) é dado pela expressão $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{ \mathbf{E}_0 \exp\left[i\,\Phi(\mathbf{r},t) \right] \right\} \in \mathbb{R}^3$, em que $\Phi(\mathbf{r},t)$ representa a fase da onda, com

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r},t) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t}\,.$$

O vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\,\mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3$ é tal que $\mathbf{E}_1 = \mathsf{A}\,\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{E}_2 = \alpha\,\mathsf{A}\,\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$. Tem-se $\alpha > 0$ e ainda $\mathsf{A} > 0$. Os vectores reais $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ são unitários e dados por

$$\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{f} &= \sin(\varphi)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{g} &= \sin(\varphi)\,\mathbf{e}_1 - \cos(\varphi)\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}}\,.$$



Questões:

1. Determine quais os valores do ângulo φ que correspondem a uma polarização linear. Justifique a sua resposta e indique a direcção de polarização.

Solução

A polarização é linear desde que os vectores $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ sejam paralelos ou anti-paralelos, i.e., $\mathbf{f} \times \mathbf{g} = 0$. Ou seja: a polarização é linear para $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi / 2$. Para $\varphi = 0$ a polarização é linear e horizontal (i.e., orientada segundo Z). Para $\varphi = \pi / 2$ a polarização é linear e vertical (i.e., orientada segundo X).

$$\left[\!\left[\begin{array}{lll} \bullet \quad \varphi = 0 & \mapsto & \text{Polarização linear segundo } \mathsf{Z} \ (\text{horizontal}) \\ \bullet \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} & \mapsto & \text{Polarização linear segundo } \mathsf{X} \ (\text{vertical}) \end{array}\right.$$

---

2. Note que existe um par de valores (α_0, φ_0) que conduz a uma polarização circular. Determine esses valores $\alpha = \alpha_0$ e $\varphi = \varphi_0$, indicando (ainda) qual a orientação (direita ou esquerda) da polarização. Justifique a sua resposta.

Solução

A polarização é circular quando se tiver, simultaneamente, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 0$ e $\alpha = 1$. Neste caso é $\mathbf{E}_0^2 = 0$. Com efeito, tem-se

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) = -\cos(2\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_0^2 &= \left(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2\right) + 2\,i\,(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \\ &= \left(1 - \alpha^2\right) \mathsf{A}^2 - 2\,i\,\alpha\,\mathsf{A}^2 \cos(2\varphi) \end{aligned}}$$

Infere-se, daqui, que a polarização é circular quando

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}}\,.$$

A polarização circular é **direita** porque

$$\mathbf{f}\times\mathbf{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\\ \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi)\end{vmatrix}=2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,\mathbf{e}_2=\sin(2\varphi)\,\mathbf{e}_2$$

$$\therefore\quad \hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2)=\alpha\,\mathsf{A}^2\sin(2\varphi).$$

Assim

$$\boxed{\begin{matrix}\alpha_0=1\\ \varphi_0=\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}}\quad\Rightarrow\quad \hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2)=\mathsf{A}^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathsf{A}^2>0\quad\Rightarrow\quad \textbf{RHC}\quad(\text{polarização circular direita})$$

---

3. Considere, agora, que $\varphi=\pi/3$ e que α é a solução positiva da equação quadrática

$$\boxed{\sqrt{3}\left(1-\alpha^2\right)=\alpha}\,.$$

Nestas condições, diga se a polarização é linear, circular ou elíptica. Justifique a sua resposta.

Solução
Neste caso, vem sucessivamente

$$\varphi=\frac{\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{matrix}\sin(2\varphi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos(2\varphi)=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}}$$

$$\mathbf{f}\times\mathbf{g}=\sin(2\varphi)\,\mathbf{e}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{e}_2\neq 0$$

$$\sqrt{3}\,\alpha^2+\alpha-\sqrt{3}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\alpha=\frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}}\approx 0.7522}$$

$$1-\alpha^2=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}_0^2=\left(1-\alpha^2\right)\mathsf{A}^2-2i\alpha\,\mathsf{A}^2\cos(2\varphi)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)\alpha\,\mathsf{A}^2\neq 0$$

$$\left\|\begin{array}{l}\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \neq 0 \\ \mathbf{E}_0^2 \neq 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textbf{Polarização elíptica}}$$

---

4. Nas condições da alínea anterior classifique a orientação da polarização. Justifique.

Solução

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) = \alpha\, \mathsf{A}^2 \sin(2\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \alpha\, \mathsf{A}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polarização elíptica } \textbf{direita}$$

---

5. Ainda nas condições de **3.**, determine os vectores axiais $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$.

Solução

Trata-se de determinar os eixos principais da elipse.

$$\mathbf{E}_0^2 = (1-\alpha^2)\, \mathsf{A}^2 - 2i\alpha\, \mathsf{A}^2 \cos(2\varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right) \alpha\, \mathsf{A}^2 = \varrho\, e^{i\theta} = \varrho \left[\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right]$$

$$\therefore \quad \tan(\theta) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\xi^2 = \frac{\left|\mathbf{E}_0^2\right|}{\mathbf{E}_0^2} = \exp(-i\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\left|\mathbf{E}_0^2\right|}{\mathbf{E}_0^2}} = \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boxed{\xi = \frac{\sqrt{3} - i}{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_0 = \xi\, \mathbf{E}_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_1 + i\, \mathbf{F}_2 = \xi\, (\mathbf{E}_1 + i\, \mathbf{E}_2) = \frac{\sqrt{3} - i}{2} (\mathbf{E}_1 + i\, \mathbf{E}_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{F}_2 &= -\frac{1}{2}\,\mathbf{E}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{E}_2\end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \frac{\mathsf{A}}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathbf{f} + \alpha\,\mathbf{g}\right) \\ \mathbf{F}_2 &= -\frac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{f} - \sqrt{3}\,\alpha\,\mathbf{g}\right)\end{aligned}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}\end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\mathbf{f} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\right) \\ \mathbf{g} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\right)\end{aligned}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \frac{\mathsf{A}}{4}\left[\left(3 + \sqrt{3}\,\alpha\right)\mathbf{e}_1 + \left(\sqrt{3} - \alpha\right)\mathbf{e}_3\right] \\ \mathbf{F}_2 &= -\frac{\mathsf{A}}{4}\left[\left(\sqrt{3} - 3\,\alpha\right)\mathbf{e}_1 + \left(1 + \sqrt{3}\,\alpha\right)\mathbf{e}_3\right]\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathsf{A} = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &\approx 1.0757\,\mathbf{e}_1 + 0.2450\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{F}_2 &\approx 0.1311\,\mathbf{e}_1 - 0.5757\,\mathbf{e}_3\end{aligned}}$$

---

6. Ainda nas condições de **3.**, determine os semi-eixos (maior, a; e menor, b) caso a polarização seja elíptica.

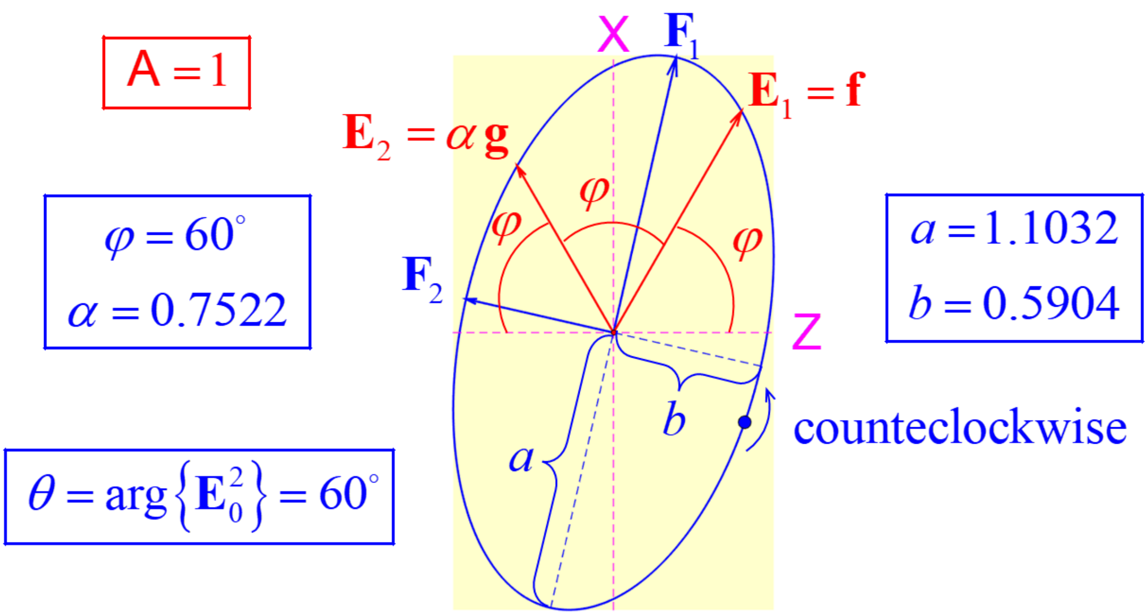
Solução

$$\boxed{\begin{aligned}a &= \left|\,\mathbf{F}_1\,\right| \approx 1.1032 \\ b &= \left|\,\mathbf{F}_2\,\right| \approx 0.5904\end{aligned}}$$

---

7. Ilustre graficamente a polarização a que corresponde a sua resposta às questões **3** – **6** dadas anteriormente.

Solução



Polarização Elíptica Direita

---

8. Admita, agora, que combina duas ondas com polarizações diferentes: uma delas corresponde a ter-se $\mathbf{E}_0$; a outra corresponde a ter-se $\mathbf{E}_0^*$. Ou seja: o campo eléctrico instantâneo da composição das duas ondas é dado por

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\left(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^*\right)\exp\left[i\,\Phi(\mathbf{r},t)\right]\right\} \in \mathbb{R}^3}.$$

Classifique completamente a polarização que se obtém com esta composição. Ilustre a sua resposta com um gráfico.

Solução

Neste caso tem-se

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_1 + i\,\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_0^* &= \mathbf{E}_1 - i\,\mathbf{E}_2 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^* = 2\,\mathbf{E}_1 = 2\,\Re\left\{\mathbf{E}_0\right\}}.$$

Daqui, infere-se que

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\Re\left\{2\,\mathbf{E}_1\exp\left[i\,\Phi(\mathbf{r},t)\right]\right\}=2\,\mathbf{E}_1\cos\left[\Phi(\mathbf{r},t)\right]}\,.$$

Trata-se, como é óbvio, de uma polarização **linear** que oscila paralelamente a $\mathbf{E}_1$, i.e., ao vector unitário $\mathbf{f}$. Com efeito,

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{E}_1=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{f}=0}\,.$$

Tem-se, em particular,

$$\boxed{\begin{array}{c}\max\left\{\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|\right\}=2\left|\mathbf{E}_1\right|\\ \min\left\{\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|\right\}=0\end{array}}\,.$$

---

9. Suponha que tem, apenas, $\mathbf{E}_0=\mathsf{A}\,\mathbf{e}_1$, i.e., $\mathbf{E}_1=\mathsf{A}\,\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{E}_2=0$. Explique de que polarização se trata e prove que esta polarização pode ser escrita como uma combinação linear de duas ondas – uma onda, com polarização circular direita; outra onda, com polarização circular esquerda.

Solução

Trata-se de uma onda com polarização **linear** segundo o eixo X (vertical). Como se pode ver facilmente, tem-se

$$\mathbf{E}_0=\mathsf{A}\,\mathbf{e}_1=\frac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1+i\,\mathbf{e}_2\right)+\frac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1-i\,\mathbf{e}_2\right).$$

Assim, o vector complexo $\mathbf{E}_0$ é tal que

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{R}=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1+i\,\mathbf{e}_2\right)\\ \mathbf{L}=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1-i\,\mathbf{e}_2\right)\end{array}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mathbf{E}_0=\mathbf{R}+\mathbf{L}}\,.$$

Mas, agora, é fácil de provar que o vector complexo $\mathbf{R}$ corresponde a uma **polarização circular direita** e que o vector $\mathbf{L}$ corresponde a uma **polarização circular esquerda**. Com efeito,

$$\left\|\begin{array}{l}\mathbf{R}^2=\dfrac{\mathsf{A}^2}{4}\left[\left(\mathbf{e}_1+i\,\mathbf{e}_2\right)\cdot\left(\mathbf{e}_1+i\,\mathbf{e}_2\right)\right]=\dfrac{\mathsf{A}^2}{4}\left[\mathbf{e}_1^2+2\,i\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\right)-\mathbf{e}_2^2\right]\\ \mathbf{L}^2=\dfrac{\mathsf{A}^2}{4}\left[\left(\mathbf{e}_1-i\,\mathbf{e}_2\right)\cdot\left(\mathbf{e}_1-i\,\mathbf{e}_2\right)\right]=\dfrac{\mathsf{A}^2}{4}\left[\mathbf{e}_1^2-2\,i\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\right)-\mathbf{e}_2^2\right]\end{array}\right.$$

$$\textbf{Conclusão}\ \rightarrow\ \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{R}^2=0\\ \mathbf{L}^2=0\end{array}}\ \rightarrow\ \textbf{polarizações circulares}$$

Supondo que a onda se propaga segundo

$$\boxed{\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{e}_3}\ \Rightarrow\ \left\|\begin{array}{l}\mathbf{R}=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1+i\,\mathbf{e}_2\right)\ \Rightarrow\ \left\|\begin{array}{l}\mathbf{E}_1=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\,\mathbf{e}_1\\ \mathbf{E}_2=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\,\mathbf{e}_2\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \hat{\mathbf{k}}\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2\right)>0\\ \mathbf{L}=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\left(\mathbf{e}_1-i\,\mathbf{e}_2\right)\ \Rightarrow\ \left\|\begin{array}{l}\mathbf{E}_1=\dfrac{\mathsf{A}}{2}\,\mathbf{e}_1\\ \mathbf{E}_2=-\dfrac{\mathsf{A}}{2}\,\mathbf{e}_2\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \hat{\mathbf{k}}\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2\right)<0\end{array}\right.$$

então a $\mathbf{R}$ corresponde a uma onda com **polarização circular direita** e a $\mathbf{L}$ corresponde uma onda com **polarização circular esquerda**.
