Equações Exatas

Consideremos uma equação diferenciável da forma

$$M(t,x)+N(t,x)\frac{dx}{dt}=0. \tag{1}$$

Dizemos que a equação (1) é *exata* se existe uma função $\phi(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M(t,x), \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}=N(t,x). \tag{2}$$

Se a equação (1) tem uma condição inicial $x(t_0)=x_0$ e as funções $M(t,x)$ e $N(t,x)$ são contínuas e se $N(t_0,x_0)\neq 0$, então temos uma solução implícita do PVI dada por

$$\phi(t,x)=\phi(t_0,x_0) \tag{3}$$

De fato a derivada implícita da funções $\phi(t,x)=C$ é

$$0=\frac{d}{dt}\phi(t,x)=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}=M(t,x)+N(t,x)\frac{dx}{dt}.$$

Notamos se a equação (1) é exata e se ϕ é de classe $\mathcal{C}^2$, então

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{4}$$

Portanto as derivadas parciais em (4) são necessárias para a equação (1) seja exata. No caso as funções M e N são de classe $\mathcal{C}^1$ em uma retângulo R e $(t_0,x_0)\in R$, então a função

$$\phi(t,x)=\int_{x_0}^{x}N(t_0,s)\,ds+\int_{t_0}^{t}M(s,x)\,ds \tag{5}$$

tem a propriedades seguintes.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=M(t,x)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=N(t_0,x)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial M}{\partial x}(s,x)\,ds\\&=N(t_0,x)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial N}{\partial s}(s,x)\,ds\\&=N(t_0,x)+N(t,x)-N(t_0,x)=N(t,x).\end{aligned}$$

Portanto em um retângulo uma equação é exata se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{6}$$

Por exemplo em $R=\{(t,x):t,x>0\}$ a equação

$$\frac{x}{t}+\log(x)+\left(\frac{t}{x}+\log(t)\right)x'=0$$

é exata. Temos $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}+\log(x)\right)=\frac{1}{t}+\frac{1}{x}, \quad$ e $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x}+\log(t)\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{t}.$

E

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{x}{t} + \log x \\
&= x \log t + t \log x + f(x) \\
\frac{t}{x} + \log(t) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(x \log t + t \log x + f(x)\big) \\
&= \log t + \frac{t}{x} + f'(x).
\end{aligned}
$$

Logo $f(x)$ é constante e $\phi(t,x) = x \log t + t \log x$. A solução do PVI $x(1) = 1$ é dada implicitamente por $\phi(t,x) = \phi(1,1)$ ou

$$0 = x \log t + t \log x.$$

Consideremos a equação $(xy^2 + bx^2y) + (x+y)x^2y' = 0$, com $b \in \mathbb{R}$. Como o domínio de $xy^2 + bx^2y$ e de $(x+y)x^2$ é $\mathbb{R}^2$ a equação é exata se e só se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\big(xy^2 + bx^2y\big) &= \frac{\partial}{\partial x}\big((x+y)x^2\big) \\
2xy + bx^2 &= x^2 + 2x(x+y).
\end{aligned}
$$

Logo $b = 3$.

Redutível a exata

Se uma equação $M(t,x) + N(t,x)x' = 0$, com M N funções diferenciáveis em um retângulo, não é exata podemos tentar e multiplicá-lo por uma função μ de tal forma que se torne exata. A função μ chama-se *fator integrante*. Temos de resolver

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu \cdot M\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\mu \cdot N\big) \tag{7}$$

Por exemplo, $(3t^2x^2 + t) + (t^3+1)xx' = 0$ não é exata. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial x}(3t^2x^2 + t) = 6t^2x, \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t}(t^3+1)x = 3t^2x.$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu \cdot (3t^2x^2 + t)\big) &= \frac{\partial}{\partial t}\big(\mu \cdot (t^3+1)x\big) \\
\mu_x \cdot (3t^2x^2 + t) + \mu \cdot 6t^2x &= \mu_t \cdot (t^3+1)x + \mu \cdot 3t^2x \\
\mu \cdot 3t^2x &= \mu_t \cdot (t^3+1)x - \mu_x \cdot (3t^2x^2 + t)
\end{aligned}
$$

Temos um fator integrante $\mu(t,x) = t^3 + 1$ e

$$(t^3+1)(3t^2x^2 + t) + (t^3+1)^2xx' = 0$$

é exata. Para resolver o PVI $x(0) = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= (t^3+1)^2x \\
\phi &= \frac{(t^3+1)^2x^2}{2} + f(t) \\
(t^3+1)3t^2x^2 + f'(t) &= (t^3+1)(3t^2x^2 + t) \\
\phi(t,x) &= \frac{(t^3+1)}{2} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \\
x &= \frac{2\sqrt{1 - t^5/5 - t^2/2}}{|t^3+1|}.
\end{aligned}
$$