TÉCNICO LISBOA

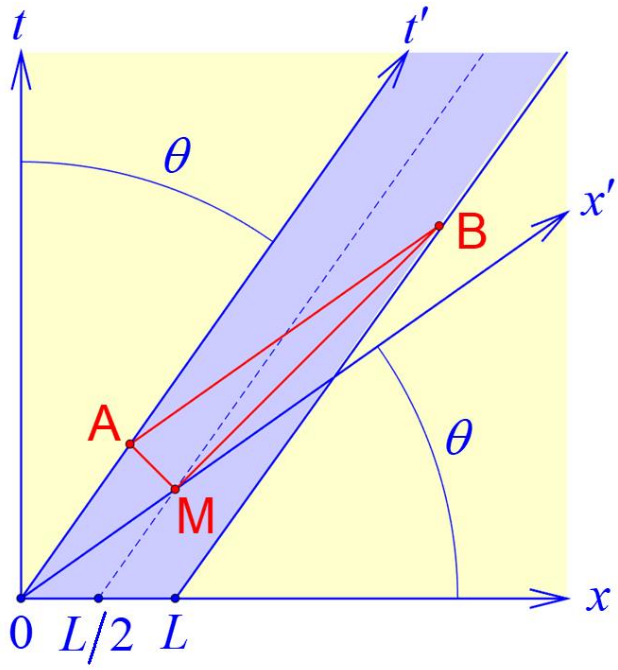
Propagação & Antenas

Docente Responsável: **Prof. Carlos R. Paiva**

Duração: 45 minutos **8 de Outubro de 2021**

Ano Lectivo: 2021 / 2022 **PRIMEIRO MAP45**

Considere, neste problema, unidades naturais (ou geométricas) em que $c=1$. **Alice** encontra-se no interior de um vagão de comboio, que se desloca – em relação à estação – com velocidade β. Na estação encontra-se Bob, que observa o que se passa no interior do vagão (onde se encontra Alice). A meio do vagão (e no seu interior) são emitidos dois feixes laser em sentidos diametralmente opostos. Como a emissão dos dois lasers é simultânea e estes se encontram no meio do vagão, Alice verifica que os dois feixes chegam simultaneamente às paredes esquerda e direita do vagão. Designemos por A o acontecimento chegada do feixe (que se desloca para a esquerda) à parede esquerda e por B o acontecimento chegada do feixe (que se desloca para a direita) à parede direita. O acontecimento M corresponde à emissão (simultânea) dos dois feixes. Seja $\mathbf{S} \mapsto (x,t)$ o sistema de coordenadas de Bob e $\mathbf{S}' \mapsto (x',t')$ o sistema de coordenadas de Alice. Na figura anexa representam-se os dois sistemas, mas optou-se por partir do ponto de vista de Bob.



Considere que, do ponto de vista de Bob, o comprimento do vagão é $L=\sqrt{2}$. Suponha, ainda, que se tem $\beta = 1/\sqrt{2}$.

Questões:

1. Escreva, no referencial de Bob, a equação que descreve o eixo t' de Alice (note que se trata da equiloc de Alice $x'=0$).

Solução
A equiloc da Alice $x'=0$ que funciona como um «relógio» (eixo t') é descrita por Bob através da equação $x=\beta t$.

2. Escreva, no referencial de Bob, a equação que descreve o eixo x' de Alice (note que se trata da equitemp de Alice $t'=0$).

Solução
A equitemp da Alice $t'=0$ que funciona como uma «régua» (eixo x') é descrita por Bob através da equação $t=\beta x$. Com efeito, como se indica na figura, o ângulo entre os eixos t e t' é θ, tal como o ângulo entre os eixos x e x'. Esse ângulo θ é tal que $\tan(\theta)=\beta$.

3. Determine o ângulo θ em graus.

Solução
Tal como se indicou na solução da alínea anterior, tem-se $\tan(\theta)=\beta$. Daqui resulta, portanto, que se tem

$$\tan(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0.6155 \text{ rad} = 35.2644^\circ .$$

4. Determine, no referencial de Bob, as coordenadas $(x_\mathrm{M}, t_\mathrm{M})$ do acontecimento M.

Solução
O acontecimento M resulta da intersecção das rectas

$$\begin{cases} x=\beta t + \dfrac{L}{2} \\ t=\beta x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_\mathrm{M} &= \frac{L}{2\left(1-\beta^2\right)} \\ t_\mathrm{M} &= \frac{\beta L}{2\left(1-\beta^2\right)} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_\mathrm{M} &= \sqrt{2} = 1.4142 \\ t_\mathrm{M} &= 1 \end{aligned}}$$

5. Determine, no referencial de Bob, as coordenadas (x_A, t_A) do acontecimento A.

Solução
O acontecimento A resulta da intersecção das rectas

$$\begin{cases} x = \beta t \\ x - x_M = t_M - t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_A &= \beta t_A = \gamma^2 \beta \frac{L}{2} \\ t_A &= \frac{x_M + t_M}{1+\beta} = \gamma^2 \frac{L}{2} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_A &= 1 \\ t_A &= \sqrt{2} = 1.4142 \end{aligned}}$$

Note-se que

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{2}\,.$$

6. Determine, no referencial de Bob, as coordenadas (x_B, t_B) do acontecimento B.

Solução
O acontecimento B resulta da intersecção das rectas

$$\begin{cases} x = \beta t + L \\ x - x_M = t - t_M \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_B &= \beta t_B + L = \left(1 + \frac{\gamma^2 \beta}{2} + \gamma^2 \beta^2\right) L \\ t_B &= \frac{L}{1-\beta} - \frac{x_M - t_M}{1-\beta} = \gamma^2 (1 + 2\beta) \frac{L}{2} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_B &= 1 + 2\sqrt{2} = 3.8284 \\ t_B &= 2 + \sqrt{2} = 3.4142 \end{aligned}}$$

Note-se que se tem

$$\begin{cases} \Delta x = x_B - x_A = \left(1 + \gamma^2 \beta^2\right) L = \gamma^2 L = 2\sqrt{2} = 2.82842 \\ \Delta t = t_B - t_A = \gamma^2 \beta L = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

7. Explique a lógica que levou a determinar os eixos espacial e temporal de Alice na figura da página anterior.

Solução

- Os eixos do sistema de coordenadas de Bob são triviais: o eixo vertical é o eixo temporal; o eixo horizontal é o eixo espacial. Porém, do ponto de vista de Alice, a situação é (um pouco) mais complicada.
- O eixo temporal (ou «relógio») de Alice corresponde à sua equiloc $x' = 0$ que, do ponto de vista de Bob, é o eixo de equação $x = \beta t$ (tal como se viu anteriormente). Trata-se da equiloc de Alice que passa pela origem.
- O eixo espacial (ou «régua») de Alice corresponde à sua equitemp $t' = 0$ que, do ponto de vista de Bob, é o eixo de equação $t = \beta x$. A lógica, neste caso, é a seguinte: este eixo terá de ser paralelo ao segmento de recta que liga os acontecimentos (simultâneos, do ponto de vista de Alice) A e B. Com efeito, para um dado observador, todas as equitemps têm de ser paralelas entre si. O eixo espacial de Alice terá de ser a equitemp que, em particular, passa pela origem.

8. Explique que conclusão física importante se pode retirar do facto das equitemps de Bob não serem paralelas em relação às equitemps de Alice.

Solução

Esta é a tradução geométrica do facto do tempo, em relatividade restrita, não ser absoluto – tal como se considerava em mecânica newtoniana. Esta é uma consequência directa da constância da velocidade da luz: o conceito de simultaneidade deixa de ser absoluto; passa a ser considerado relativo, i.e., depende do observador que se está a considerar. De acordo com a mecânica newtoniana, o tempo era absoluto e, consequentemente, a velocidade da luz dependia do observador. Na realidade a velocidade da luz não deveria ter qualquer limite numérico. Em relatividade restrita, qualquer fotão tem sempre a mesma velocidade em todos os referenciais de inércia, a saber: $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

9. Determine o comprimento L_0 do vagão de comboio na perspectiva de Alice.

Solução

Do ponto de vista de Alice, o comprimento do vagão é **muito simples** de medir. Como se consideram unidades naturais (ou geométricas), em que faz $c = 1$, esse comprimento é numericamente igual ao dobro do tempo que cada feixe laser leva a propagar-se desde o acontecimento M até ao acontecimento A (ou, o que é o mesmo, até ao acontecimento B). Ou seja:

$$L_0 = 2\left(t'_\mathrm{A} - t'_\mathrm{M}\right) = 2\left(t'_\mathrm{B} - t'_\mathrm{M}\right).$$

Notando, então, que é $t'_\mathrm{M} = 0$, infere-se que deverá ter-se

$$t'_{\mathrm{A}} = t'_{\mathrm{B}} = \frac{L_0}{2} .$$

Mas, do ponto de vista de Bob, esse tempo não é (tão) fácil de calcular. Há que considerar dois movimentos: o do sinal electromagnético; e o do movimento do comboio.

Todavia, podemos (e devemos) recorrer à chamada **invariância do intervalo** (de espaço-tempo). Esta invariância estabelece o seguinte:

$$\boxed{\left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}\right)^2 - \left(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}\right)^2 = \left(x'_{\mathrm{B}} - x'_{\mathrm{A}}\right)^2 - \left(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}\right)^2} .$$

Ora, $t'_{\mathrm{A}} = t'_{\mathrm{B}}$ (de acordo com Alice). Também, de acordo com Alice, tem-se $x'_{\mathrm{B}} - x'_{\mathrm{A}} = L_0$. Porém, tal como se calculou anteriormente (ver **6.**), tem-se

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = \Delta x = \gamma^2 L \\ t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}} = \Delta t = \gamma^2 \beta L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(1-\beta^2\right)\left(\gamma^2 L\right)^2 = L_0^2} .$$

Logo, atendendo a que $\gamma^2 \left(1-\beta^2\right) = 1$, obtém-se finalmente

$$L_0 = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_0 = 2} .$$

10. Que consequências, acerca dos fundamentos da geometria euclidiana, consegue retirar da análise relacionada com esta figura?

Solução

A noção de paralelismo fica intacta. Mas, o mesmo não se pode dizer do conceito de ortogonalidade. O paralelismo é um conceito da geometria afim. A ortogonalidade é um conceito dependente da métrica. Por outras palavras: a geometria euclidiana, que se utiliza no estudo da mecânica newtoniana (em que o espaço e o tempo são completamente independentes), não é utilizável (também) em relatividade restrita – em que o espaço e o tempo (tal como claramente identificado por Hermann Minkowski) são uma única entidade (interdependente, portanto). Se apenas considerarmos uma única dimensão espacial (i.e, um espaço-tempo bidimensional), temos um plano hiperbólico, com uma métrica não-euclidiana – que traduz, geometricamente, a invariância do espaço-tempo (tal como se viu anteriormente).

11. Identifique o efeito físico que permite chegar à conclusão da pergunta anterior.

Solução

O efeito físico extraordinário, no sentido em que é contrário ao senso comum, é o da invariância da velocidade da luz. Este fenómeno físico é completamente incompatível com a relatividade de Galileu. Parece, à primeira vista, que estamos perante uma singularidade específica da teoria electromagnética. Na realidade, isso não é assim: o que os fotões têm de especial é o facto de serem bosões com massa nula. E, tanto quanto sabemos actualmente, os fotões não deverão ser as únicas partículas elementares com massa nula.

12. Explique a razão que levou Einstein a superar a perspectiva de Maxwell. Note que Einstein indicou mesmo as equações de Maxwell como o principal motivo que o levou a revolucionar o nosso entendimento acerca da natureza do espaço e do tempo. Ou seja: o que distinguia as duas visões (de Maxwell e de Einstein) que, não obstante baseadas no mesmo conjunto de equações, permitiam a dois dos maiores génios da história da física chegar a conclusões tão antagónicas? De que forma devemos comentar, à luz dos conhecimentos actuais, estas duas visões?

Solução

- De acordo com Maxwell e com a física pré-relativista, as ondas electromagnéticas deveriam propagar-se num meio hipotético designado por «éter luminífero». Assim, tal como o vento normal (i.e., de ar) poderia influenciar a velocidade de propagação do som, também o éter luminífero deveria provocar uma espécie de «vento», devido ao arrastamento provocado pelo movimento (e.g., dos planetas em torno do Sol). Este efeito hipotético do «vento de éter» deveria permitir a compatibilidade entre a mecânica newtoniana e a electrodinâmica baseada nas equações de Maxwell.
- De acordo com Einstein, a luz não deveria extinguir-se (ou diminuir) em função do movimento relativo de um observador. O éter, por outras palavras, tinha sido uma invenção sem qualquer correspondência com a realidade física. Tratava-se, mesmo, de algo que perturbava a relatividade quando aplicada ao electromagnetismo e às equações de Maxwell. Ou seja: o éter tinha sido uma invenção perniciosa, cuja existência apenas vinha perturbar a simetria fundamental da teoria electromagnética. Mas, está claro, a mecânica newtoniana teria de ser reescrita em função disso. O tempo absoluto foi uma das primeiras vítimas.
- Toda a verificação experimental até hoje (e, claro está, com rigor experimental crescente) confirma a ideia de Einstein: não existe um éter luminífero que perturbe a velocidade da luz – tal como o vento perturba a velocidade do som. A relatividade restrita tem passado todos os testes experimentais a que tem sido (intensamente) submetida.