CDI-III
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

MICHAEL PALUCH • 1º SEMESTRE 2021/2022

AULA 4:

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais. Consideramos a equação diferencial

$$x'(t) = A \cdot x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

onde $x(t)$ e $b(t)$ são funções vetoriais. Recordamos que a série de potências

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

converge para cada $t \in \mathbb{R}$ e

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A. \tag{3}$$

Para resolver (1) temos um fator integrante e^{-At} e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) &= e^{-At}x' + e^{-At}(-A)x\\ &= e^{-At}\left(x' - Ax\right)\\ &= e^{-At}b(t)\end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left(e^{-As}x(s)\right) ds = \int_{t_0}^{t} e^{-As}b(s)\, ds$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{As}b(s)\, ds.$$

Este método chama-se *variação das coeficientes*. De fato, a solução geral de (1), sem a condição inicial, e da forma

$$e^{At} \cdot v + x_p(t) \tag{4}$$

onde $e^{At} \cdot v$ é a solução geral da equação homogénea e $x_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogénea. Podemos procurar uma solução particular da forma

$$x_p(t) = e^{At} \cdot v(t). \tag{5}$$

Essa função é uma solução se e só se

$$\begin{aligned}x_p' &= \frac{d}{dt}\left(e^{At} \cdot v(t)\right)\\ &= Ae^{At} \cdot v(t) + e^{At} \cdot v'(t)\\ &= Ae^{At} \cdot v(t) + b(t).\end{aligned}$$

Logo

$$e^{At} \cdot v'(t) = b(t) \quad \text{ou} \quad v'(t) = e^{-At}b(t).$$

Para determinar e^{At} podemos usar vetores próprios e vetores próprios generalizados. Temos para matrizes A e B ambos do tipo $n \times n$ tais que $AB = BA$

$$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}.$$

Portanto se v é um vetor próprio e $A \cdot v = \lambda v$, então

$$e^{At}v = e^{\lambda t}v.$$

Se existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores próprios com $A \cdot v_j = \lambda_j v_j$ então para a matriz S cujas colunas são os vetor $v_1, \dots, v_s$ temos

$$e^{At}S = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

e portanto

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Nos caso não exite uma base de vetores próprios, podemos usar vetores próprios generalizados; isto é vetores v tais que

$$(A - \lambda I)^k \cdot v = 0, \quad k \geqslant 1 \text{ e } v \neq 0.$$

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem um valor próprio $\lambda = 1$ e

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tem característica 2. Portanto existe dois vetores próprios linearmente independente. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $(A - I)^2 = 0$ temos

$$e^{At} = e^t e^{(A-I)t} = e^t \big(I + (A - I)t\big) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fórmula de Euler. Designa-se por i uma raiz de -1. Para um número real α, a fórmula de Euler é

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha). \tag{6}$$

Por exemplo, para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

calculamos
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2+5 = (\lambda-2-i\sqrt{5})(2-\lambda+i\sqrt{5}).$$
Para $\lambda = 2-i\sqrt{5}$ temos um vetor próprio $\left(\begin{smallmatrix} -i\sqrt{5} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Usando conjugação temos duas soluções complexas
(8)
$$z_1(t) = e^{2t}(\cos\sqrt{5}t) - i\operatorname{sen}\sqrt{5}t)\begin{pmatrix} -i\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_2(t) = e^{2t}(\cos\sqrt{5}t) + i\operatorname{sen}\sqrt{5}t)\begin{pmatrix} i\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$
linearmente independentes. Notamos que $\overline{z_1} = z_2$ e portanto
$$\frac{z_1-z_2}{2i} = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{5}t \end{pmatrix}, \qquad \frac{z_1+z_2}{2} = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}t \\ \cos\sqrt{5}t \end{pmatrix}$$
são duas soluções linearmente independentes. Como a parte não homogénea da equação (7) constante e a matriz da equação é invertível, a solução geral é
$$x(t) = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{5}t \end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix} -\sqrt{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}t \\ \cos\sqrt{5}t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar a solução geral de

(9)
$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

calculamos
$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$
Para $\lambda = 1$ temos dois vetores próprios $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ linearmente independentes e para $\lambda = -1$ temos um vetor próprio $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Logo
$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t & 0 \\ e^{-t} & -e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
Para determinar uma solução particular temos
$$e^{-At}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}+e^{2t}}{2} \\ \dfrac{e^{3t}-e^{2t}}{2} \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$
Logo a solução geral é
$$c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2e^{2t}}{3} \\ \dfrac{e^t}{2} \\ -(1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$