CDI-III

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

MICHAEL PALUCH • 1º SEMESTRE 2021/2022

AULA 3:

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Recordamos que para cada série

(1) $$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

existe R tal que a série converge absolutamente em $]-R, R[$, e portanto $f(t)$ é uma função continua nesta intervalo. Além disso, temos

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^{k-1}, \quad -R < t < R.$$

Por exemplo a função

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2} + a^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

converge para $|t| < \infty$ ou seja para cada $t \in \mathbb{R}$.

Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais. Defines-se

(2) $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

As entradas da matriz e^{At} são séries de potências, e cada entrada converge para $|t| < \infty$. Segue-se que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

temos

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

e portanto

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}.$$

Propriedades.

- Se A e B são matrizes $n \times n$ e se $AB = BA$, então
$$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}.$$
- Se v é um vetor próprio de A e $A \cdot v = \lambda v$, então
$$e^{At} \cdot v = e^{\lambda t} v.$$
- Para cada matriz quadrada então $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

3. **Exemplo.** Determinar

$$\exp\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} t\right]$$

calculamos o polinómio característico

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

Para o valor $\lambda = -1$ temos um vetor próprio $\left(\begin{smallmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{smallmatrix}\right)$, e para o valor próprio $\lambda = 2$, que tem multiplicidade 2 só temos um vetor próprio $\left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\\ -1\end{smallmatrix}\right)$. Como

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -4 & 4 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

segue-se $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ é um vetor próprio generalizado e

$$\begin{aligned} e^{At}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} &= e^{2t}e^{(A-2I)t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\\ &= e^{2t}\left[I + (A-I)t\right]\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Logo

$$e^{At} = \begin{pmatrix}-3e^{-t} & 0 & e^{2t}\\ 4e^{-t} & e^{2t} & (1+t)e^{2t}\\ 2e^{-t} & -e^{2t} & -te^{2t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}.$$