Ficha 10 de Exercícios

1. Considere a equação
$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$
   (i) Determine a sua solução geral.

   Resolução:

   O polinómio característico da equaçcão é $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda\big((\lambda-2)^2+1\big)$. Logo a solução geral é
$$y(t) = A + e^{2t}(B\cos t + C\,\mathrm{sen}\,t).$$

   (ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

   Resolução:

   Para tem uma solução convergente quando $t \to \infty$ a solução tem ser constante. Portanto $y(0)$ pode ter qualquer valor, mas $0 = y'(0) = y'(0)$.

2. Seja $k > 0$. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação
$$y'' - 2cy' + y = 0$$
admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

Resolução:

Temos $p(\lambda) = (\lambda - c)^2 + 1 - c^2$. Se $c = \pm 1$ a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = (A + Bt)e^{ct}.$$

Segue que a única solução que satisfaz $y(0) = 0$ e $y(2k\pi) = 0$ é a solução nula. Se $1 - c^2 < 0$, então a solução geral é

$$y(t) = e^{ct}(A \operatorname{ch} \sqrt{c^2 - 1}t + B \operatorname{sh} \sqrt{c^2 - 1}t).$$

Aplicando a condição $y(0) = 0$ obtemos $A = 0$ e a condição $0 = y(2k\pi)$ obtemos $B = 0$, e portanto a única solução é nula. Notamos que

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = 0 \iff t = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se $1 - c^2 > 0$, então a solução geral é

$$y(t) = e^{ct}(A \cos \sqrt{1 - c^2}t + B \operatorname{sen} \sqrt{1 - c^2}t).$$

Aplicando as condições $y(0) = 0$ obtemos $A = 0$ e a condição $y(2k\pi) = 0$ obtemos uma solução não nula para um inteiro n que satisfaz

$$0 \leqslant c^2 = 1 - \left(\frac{n}{2k}\right)^2 < 1.$$

3. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{1}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1).

Resolução:

O polinómio característico é $\lambda^2(\lambda + 1)^2$, e portanto a solução da equação homogénea é

$$y(t) = (A_0 + A_1 t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t}.$$

(ii) Determine uma solução particular de (1).

Resolução:

Usando o método dos coeficientes indeterminados temos $y = t^2(c_0 + c_1 t) + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t$. Segue que

$$y(t) = \frac{t^3}{6} - t^2 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$$

é uma solução.

(iii) Determine a solução de (1) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

Resolução:

Para resolver esse problema podemos aplicar as condições à solução geral

$$y(t) = (A_0 + A_1 t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t}\frac{t^3}{6} - t^2 - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t,$$

ou podemos aplicar a transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}
s^2(s+1)^2 Y(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^1+1} \\
Y)(s) &= \frac{1}{s^4(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\
y(t) &= \text{Res}_{s=0}\,\frac{e^{st}}{s^4(s+1)^2} + \text{Res}_{s=1}\,\frac{e^{st}}{s^4(s+1)^2} \\
&\quad + \text{Res}_{s=0}\,\frac{e^{st}}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\
&\quad + \text{Res}_{s=1}\,\frac{e^{st}}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\
&\quad + \text{Res}_{s=i}\,\frac{e^{st}}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\
&\quad + \text{Res}_{s=-i}\,\frac{e^{st}}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\
&= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left.\frac{e^{st}}{(s+1)^2}\right|_{s=0} + \frac{d}{ds}\left.\frac{e^{st}}{s^4}\right|_{s=-1} \\
&\quad + 1 + \frac{d}{ds}\frac{e^{st}}{s(s^2+1)} + \frac{e^{it}}{i(1+i)2i} + \frac{e^{-it}}{-i(1-i)(-2i)} \\
&= -3 + 3t + (3+t/2)e^{-t} + t^3/6 - t^2 - \frac{1}{2}\text{sen}t.
\end{aligned}$$

4. Determine a solução da equação linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2y = b(t)$$

que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(i) $b(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $b(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(iii) $b(t) = e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

a) O polinómio característico da equação é $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)$. Logo a solução geral da equação é $ae^{2t} + b\cos(t) + c\,\mathrm{sen}(t)$. Obtém-se

$$y(t) = \frac{e^{2t} - \cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t)}{5}.$$

b) Como $y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4}$ é uma solução particular, obtém-se

$$y(t) = \frac{e^{2t} - 2t - 1}{4}.$$

c) Como $y(t) = -\frac{1}{2}e^t$ é uma solução particular, obtém-se

$$y(t) = \frac{4e^{2t} - 3\,\mathrm{sen}\,t + \cos t}{10} - \frac{1}{2}e^t.$$

5. Mostre que $y_1(t) = \dfrac{\mathrm{sen}\,t}{t}$ é uma solução da equação diferencial

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ty = 0 \tag{2}$$

e use redução de ordem para determinar a solução geral de (2).

Resolução:

Para obter mais uma solução que é linearmente independente de y_1 consideremos $y_2 = uy_1$. Temos então

$$\begin{aligned} 0 = t(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + 2(u'y_1 + uy_1') + t(uy_1) &= u''(ty_1) + u'(2ty_1' + y_1) + u(ty_1 2y_1' + ty_1'') \\ &= u''(ty_1) + u'(2ty_1' + y_1) \end{aligned}$$

Obtemos $u' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(t)}$ e $u = \frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}$. Logo a solução geral é

$$y(t) = A\frac{\mathrm{sen}\,t}{t} + B\frac{\cos t}{t}.$$

6. Considere a equação diferencial

$$t^2y'' + ty' - y = t \tag{3}$$

Mostre que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções linearmente independentes de equação homogénea associada, e determine a solução geral de (3).

Resolução:

É fácil de ver que y_1 e y_2 são duas solução da equação diferencial homogénea. Para mostrar que as soluções são linearmente independentes basta mostrar que a matriz

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

é invertível, ou seja $y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$. Temos

$$y_1y_2' - y_2y_1' = -\frac{t}{t^2} - \frac{1}{t} = -\frac{2}{t}.$$

Para encontrar uma solução particular podemos usar o método de variação dos coeficientes. A forma normal da equação é

$$y'' + \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = \frac{1}{t}$$

Obtem uma solução $y = (a + u_1)y_1 + (b + u_2)y_2$ onde

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/t \end{bmatrix}$$

portanto

$$y(t) = \left(a + \frac{\log t}{2}\right) t + \left(b - \frac{t^2}{4}\right) \frac{1}{t} = At + \frac{B}{t} + \frac{t}{2} \log t.$$

7. Mostre que a equação diferencial

$$\frac{x}{t} + \log(x) + \left(\frac{t}{x} + \log(t)\right) x' = 0$$

é exacta e determine tão explicitamente quanto possível a solução com $x(1) = 1$.

Resolução:

Temos
$\varphi(t, x) = x \log t + t \log x = 0$.

8. Considere a equação

$$(3t^2x^2 + t) + (t^3 + 1)xx' = 0$$

(i) Verifique que a equação não é exacta.

(ii) Determine um fator integrante.

Resolução:

Temos de resolver

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((3t^2x^2 + t)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((t^3 + 1)x\mu\right)$$
$$3t^2x \cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial t}\left((t^3 + 1)x\right) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(3t^2x^2 + t)$$

Sendo μ uma função de t ou seja $\partial\mu/\partial x = 0$ obtemos $\mu(t) = t^3 + 1$

(iii) Determine tão explicitamente quanto possível a solução com $x(0) = 1$.

Resolução:

Usando o fator integrante obtemos e

$$\varphi(t,x) = \frac{(t^3+1)x^2}{2} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x(t) = \sqrt{\frac{2}{(t^3+1)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right]}$$

9. Determine todas as soluções limitadas da equação $x^{(4)} + x' = 0$.

Resolução:

O polinómio característico da equação é $\lambda(\lambda^3+1)$ e tem raízes $0, -1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}$. Portanto a solução geral

$$x(t) = a_1 + a_2 e^{-t} + e^{t/2}(a_3 \cos \sqrt{3}t/2 + a_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}t/2).$$

Logo as soluções limitadas são $x(t) = a_1 + a_2 e^{-t}$.

10. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa:

(i) A equação $x'' + x' = 0$ tem soluções periódicas não-constantes.

Resolução:

Como a solução geral é $x(t) = a + be^{-t}$ a afirmação é falsa.

(ii) O problema de valor inicial $x' = 6t\sqrt[3]{x^2}$ com $x(0) = 0$ não tem solução única.

Resolução:

Com $x(t) = 0$ e $x(t) = t^6$ são soluções, a afirmação é falsa.