DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

1 Aula 33 de 3 de Maio

1.1 Exemplo

Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a equação $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Determine a solução geral.

Resolução: A solução geral é dada por

$$\mathbf{x}(t) = a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t) + a_3\mathbf{x}_3(t),$$

onde $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t)$ são soluções linearmente independentes. Para encontrar essas solução começamos com o polinómio característico

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & - \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1\big) - 2\big((1-\lambda) + 1\big) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) - 2(1-\lambda+1) \\ &= (2-\lambda)\big((1-\lambda)(-\lambda) - 2\big) \\ &= (2-\lambda)^2(1+\lambda) \end{aligned}$$

Associado ao valor próprio $\lambda = -1$ temos um vetor próprio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, e portanto $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\mathbf{v}_1$ é uma solução. A multiplicidade algébrica do valor próprio é 2, e portanto existem duas soluções associadas a esse valor. Uma solução é $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para determinar a última solução basta determinar um vetor próprio generalizado.

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O vetor $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um vetor no núcleo de $(A - 2I)^2$ e temos

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{At}\mathbf{v}_3 = e^{2t}\Big[I + (A - 2I)t\Big]\mathbf{v}_3 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Em resumo

Para uma matriz A com polinómio característico

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{r_t}$$

e raízes reais tem-se

(i) a dimensão do núcleo da matriz $(A - \lambda_j)^{r_j}$ é r_j, com $j = 1, \ldots, t$;

(ii) se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r_j}$ é uma base do subespaço linear

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_j)^{r_j}\mathbf{x} = 0\right\}$$

então

$$e^{At}\mathbf{v}_i = e^{\lambda_j t}\left[I + \cdots + (A - \lambda_j)^{r_j - 1}\frac{t^{r_j - 1}}{(r_j - 1)!}\right]\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, r_j$$

são r_j soluções linearmente independentes;

(iii) como $r_1 + \cdots + r_t = n$, obtém-se um base de soluções da equação homogénea

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x};$$

(iv) além disso, para

$$X(t) = \left[\mathbf{x}_1(t) \cdots \mathbf{x}_i(t) \cdots \mathbf{x}_n(t)\right]$$

tem-se

$$e^{At} = X(t) \cdot X(0)^{-1}.$$

1.2 Exemplo

Determine a solução geral **real** da equação $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: É facil de ver que o polinómio característico da matriz A é $\big((1-\lambda)^2 + 16\big)(2-\lambda)^2$, e portanto temos raízes complexas $\lambda_1 = 1 + i4$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - i4$. Associado ao valor próprio $1 + i4$ temos um vetor próprio complexo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e uma solução da equação diferencial

$$e^t\left(\cos 4t + i \operatorname{sen} 4t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\operatorname{sen} 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 4t \\ \cos 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a parte real e a parte imaginária obtemos duas soluções reais

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -\operatorname{sen} 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 4t \\ \cos 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ao valor próprio $\lambda = 2$ temos

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_4(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

são soluções e a solução geral é

$$a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t) + a_3\mathbf{x}_3(t) + a_4\mathbf{x}_4(t).$$

1.3 Exemplo

Resolve o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução: Os valores próprios da matriz são $\pm i3$ e $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $i3$. Logo a solução geral da equação homogénea é

$$a_1 \begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ -\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

Notamos que a matriz da equação é invertível, e portanto existe uma solução particular constante $\mathbf{x}_p$. Temos de resolver

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segue que $\mathbf{x}_p = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ é uma solução, e a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ -\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo $t = 0$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo a solução é

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ -\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$