Resumos

1 Análise Complexa

1.1 Funções holomorfas

1.1.1 Definição. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é *diferenciável* em $p \in \Omega$ se existe

$$f'(p) = \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}.$$

Se f é diferenciável em cada ponto de Ω dizemos que f é *holomorfa* em Ω.

Se $f = u + iv$, com $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, e u, v são de classe C^1, então f é holomorfa em Ω se e só se satisfaz a equação de **Cauchy-Riemann**.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Notamos que se f é holomorfa então $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ chama-se *inteira*.

1.1.2 Definição. Dizemos que uma função real $u(x, y)$ de classe C^2 é harmónica se satisfaz a equaç©ão de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Se $f = u + iv$ é holomorfa, então u e v são harmónicas, e dizemos que u e v são *conjugadas harmónicas*.

1.2 Integral de uma função complexa

Seja $f(z)$ uma função complexa contínua definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Se $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ é um caminho seccionalmente regular definimos o *integral* de f em γ por

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt\,.$$

1.2.1 Teorema (Teorema Fundamental do Cáculo)**.** *Se f é um função complexa contínua em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e se existe uma função holomorfa F em Ω tal que $f(z) = F'(z)$, então*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

1.2.2 Teorema (Teorema de Cauchy)**.** *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa e Ω é simplesmente conexo, então para cada caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$, temos $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

1.2.3 Definição. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular. O *índice* de um ponto $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ em relação a γ é

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-p}.$$

1.2.4 Teorema (Fórmula Integral de Cauchy). *Se f é uma função holomorfa numa bola aberta B e γ é um caminho seccional regular fechado em B, então para qualquer ponto $p \in B \setminus \gamma$ temos*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) \cdot f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\, dz.$$

1.3 Funções Harmónicas

Uma função real $u(x,y)$ chama-se *harmónica* quando é de classe $\mathcal{C}^2$ e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Para $f = u + iv$ uma função holomorfa, as funções u e v são harmónicas e dizemos que u e v são **harmónicas conjugadas**.

1.3.1 Nota. Se $u(x,y)$ é uma função definida num aberto simplesmente conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$, é sempre possível determinar uma harmónica conjugada $v\colon U \to \mathbb{R}$ resolvendo as equações de Cauchy-Riemann em ordem a v.

2 Séries de Potências

2.1 Raio de convergência

Para cada séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ existe um número $0 \leq R \leq \infty$, que se chama *raio da convergência* da série tal que

1. A série é absolutamente convergente para $|z-p| < R$.
2. Para cada $0 < \rho < R$ a série é uniformemente convergente para $|z-p| \leq \rho$.
3. A série é divergente para $R < |z-p|$.
4. A função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ é holomorfa em $|z-p| < R$,

   $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-p)^{n-1}$$

   e o raio da convergência da série da derivada também é R.

2.1.1 Teorema (Teorema de Taylor). *Se f é um função holomorfa em Ω e $p \in \Omega$, então em cada bola aberta $B_r(p) = \{z : |z-p|, r\} \subseteq \Omega$ temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p).$$

O raio da convergência da série de Taylor é o raio da maior bola $B_r(p) \subseteq \Omega$.

2.1.2 Teorema (Teorema de Laurent). *Se f é uma função holomorfa no anel $r < |z-p| < R$, então*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n,$$

com

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=s} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\, dz$$

onde $r < s < R$.

3 Singularidades

3.1 Classificação de singularidades isoladas

Dizemos que uma função f tem uma *singularidade isolada* em $p \in \mathbb{C}$ quando existe $r > 0$ tal que f é holomorfa no anel $0 < |z-p| < r$.

Seja f uma função com uma singularidade isolada em p. Define-se a **parte principal** da série de Laurent de f em p por

$$\frac{a_{-1}}{z-p} + \frac{a_{-2}}{(z-p)^2} + \cdots .$$

Dizemos que p é

- um **singularidade removível** quando a parte principal é nula,
- um **pólo de ordem** n quando a parte principal é um polinómio de grau n em $1/(z-p)$,
- um **singularidade essencial** quanto a parte principal é infinita.

3.1.1 Definição. Se f tem uma singularidade isolada em p, definimos o *resíduo* de f em p por

$$\operatorname*{Res}_{z=p} f = a_{-1},$$

onde $\sum_{n=-\infty} a_n (z-p)^n$ é a série de Laurent de f em $0 < |z-p| < r$.

3.1.2 Teorema (Teorema dos Resídous). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ uma região, isto é aberto e conexo, e seja $S = \{a_j\} \subset \Omega$ um conjunto de pontos isolados. Se f é holomorfa em $\Omega \setminus S$, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega \setminus S$ é um caminho seccionalmente regular fechado e para cada $p \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ temos*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(p) = 0,$$

então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{a_j \in S} \operatorname{Ind}_\gamma(a_j) \operatorname*{Res}_{z=a_j} f.$$

3.2 Aplicações aos integrais reais

3.2.1 Integrais impróprios

Se $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ são polinómios, $n - m \geq 2$ e $q(x)$ não tem raized reais, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{(\forall z) q(z) = 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0} \operatorname*{Res}_{z} \frac{p}{q}.$$

3.2.2 Integrais de coseno e seno

Para $R(x, y)$ uma funçcão racional tal que $R(x, y)$ é contínua em $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, temos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{(\forall z)|z|<1} \operatorname*{Res}_z f,$$

onde

$$f(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}).$$

Por exemplo

$$\int_2^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \times \frac{1}{2 + (z + z^{-1})/2}\, dz.$$