4.Modelação Física

Objetivo: *Após completar este módulo, o aluno deverá ser capaz de escrever as equações que definem um modelo de um sistema com estado contínuo com base em princípios físicos e relações fundamentais.*

Bibliografia

Complementar: Edgeland e Gravdahl (2002). *Modelling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics. Partes III e IV

Sistemas mecânicos de translação

Exemplos:

- Motores lineares
- Movimento do papel em fotocopiadoras

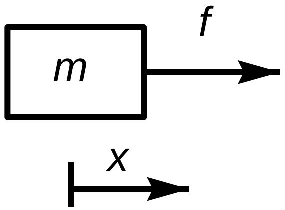
Relacionam a posição $[m]$ com o tempo $[s]$ de corpos em movimento de translação, tendo em conta as forças aplicadas.

Bibliografia

S. Mahajan. *A Student's Guide to Newton's Laws of Motion.* Cambridge University Press, 2020.

G. N. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems. Pearson.

Sistemas mecânicos de translação



Massa isolada (inércia):

Quando uma massa m $[kg]$ é actuada por uma força f $[N]$ adquire uma aceleração $[m/s^2]$ no sentido da força que satisfaz (lei de Newton):

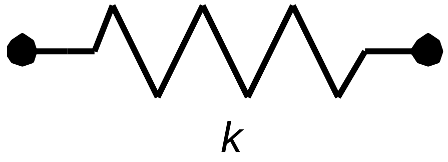
$$f = \frac{d}{dt}p(t) \quad \text{em que o momento } p(t) \text{ é } p(t) = m\frac{dx}{dt}$$

No caso da massa constante: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = f$$

f representa a soma de todas as forças aplicadas ao corpo.

A determinação de todas as forças pode ser uma dificuldade.

Molas elásticas



Elementos que armazenam energia potencial.

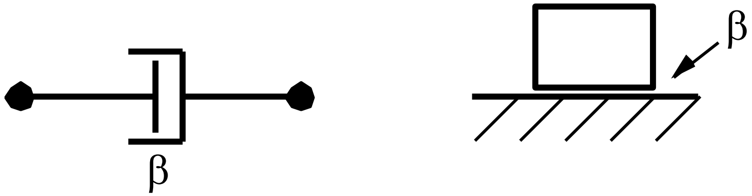
Quando a mola é comprimida (ou esticada) do comprimento x em relação à posição de repouso, reage com uma força que se opõe à compressão (ou à extensão), dada para molas lineares por

$$f = -kx$$

$k \quad [N/m]$ é chamada "constante da mola" ou constante de Hooke.

Em muitos casos a relação entre a força e a elongação é não linear.

Atrito viscoso



São os elementos que dissipam energia.

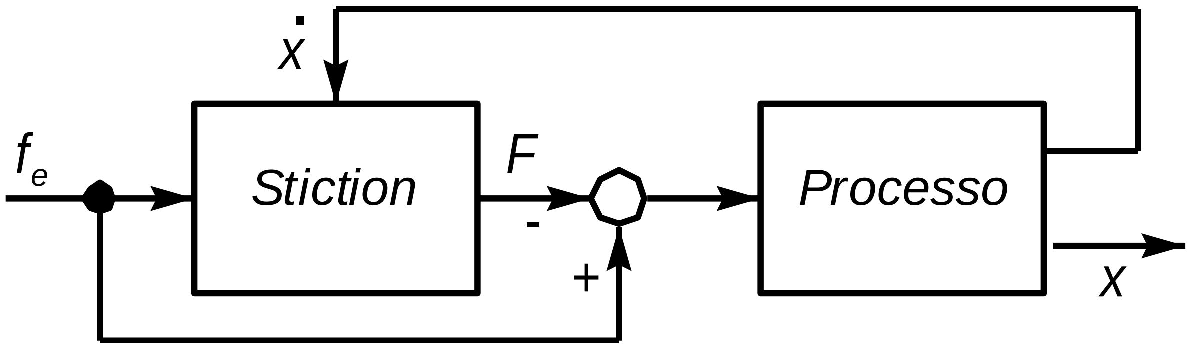
Quando existe uma diferença de velocidade entre os dois corpos o atrito corresponde com uma força que contraria o movimento e que depende da velocidade relativa ${dx}/{dt}$. No caso linear a força é dada por:

$$f = -\beta \frac{dx}{dt}$$

Atrito estático

Assume que há uma força F entre os corpos em contacto que desaparece ou se reduz quando eles entram em movimento relativo. Um modelo possível:

$$F = \begin{cases} f_e & \leftarrow |f_e| < f_s \\ f_s \delta(\dot{x}) sgn(f_e) & \leftarrow |f_e| \geq f_s \end{cases}, \quad \delta(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \leftarrow \dot{x} = 0 \\ 0 & \leftarrow \dot{x} \neq 0 \end{cases}, \quad sgn(f_e) = \begin{cases} +1 & \leftarrow f_e > 0 \\ -1 & \leftarrow f_e < 0 \end{cases}$$

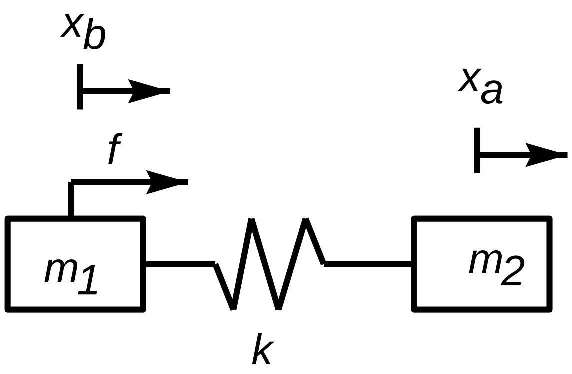


Escrita das equações de um sistema mecânico de translação

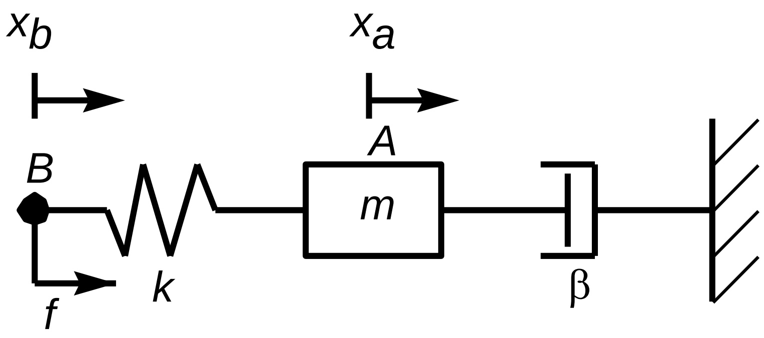
1. Associar a cada massa que se move independentemente um referencial "preso ao mundo exterior ao sistema".
2. Para cada uma das massas que se movem independentemente escrever a lei de Newton, tomando como variável a sua posição no referencial que lhe está associado:

$$m\ddot{x}_i = \sum_{\substack{Todas\ as \\ forças\ aplicadas \\ \text{à}\ massa\ i}} f_j$$

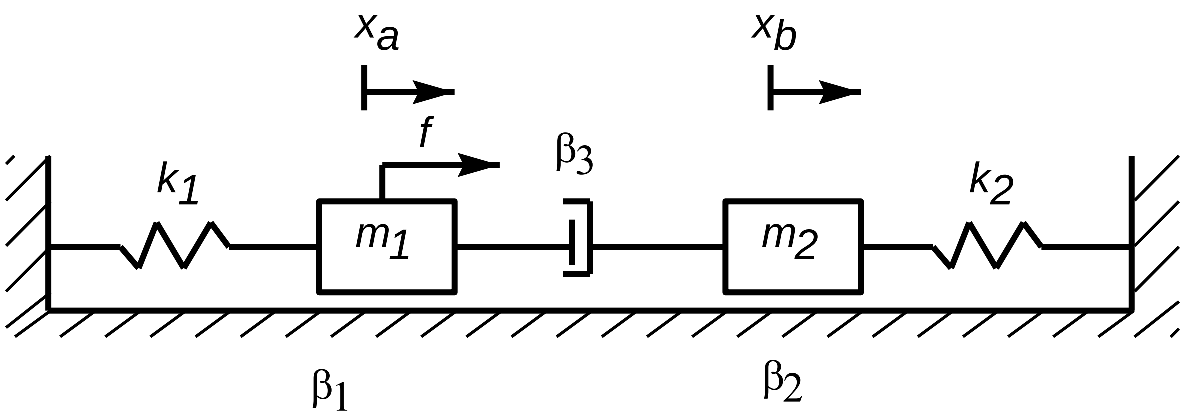
Exemplos



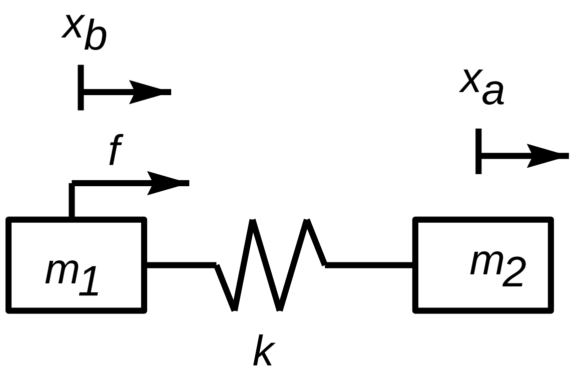
a)



b)



c)



$$m_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -k(x_a - x_b)$$

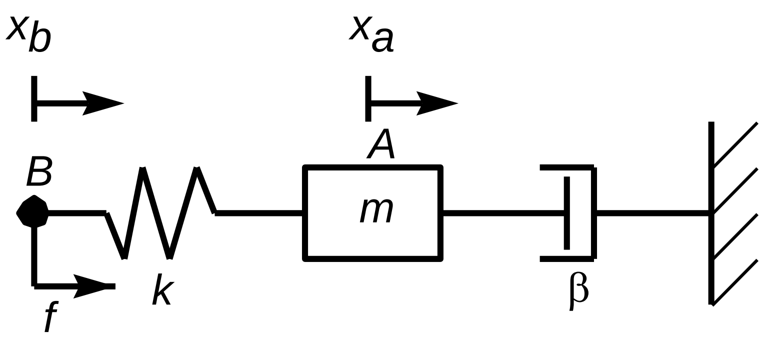
$$m_1 \frac{d^2 x_b}{dt^2} = f - k(x_b - x_a)$$

Modelo de estado tomando a força como entrada e x_a como saída:

$$m_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -k(x_a - x_b)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_b}{dt^2} = f - k(x_b - x_a) \quad x := \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} \quad u := f$$

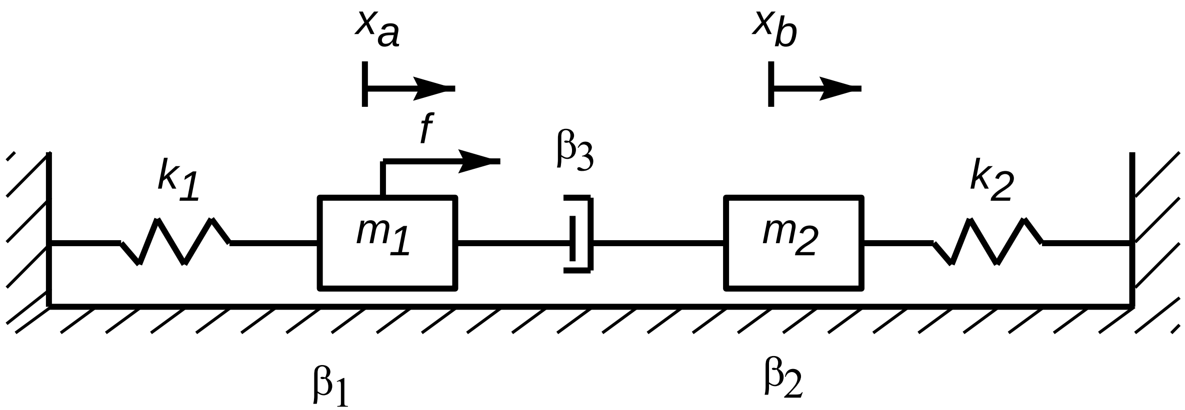
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & 0 & \frac{k}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m1} & 0 & -\frac{k}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



$$m\frac{d^2x_a}{dt^2} = -k(x_a - x_b) - \beta\frac{dx_a}{dt}$$

$$0\frac{d^2x_b}{dt^2} = f - k(x_b - x_a) \quad \rightarrow \quad f = k(x_b - x_a) \quad \rightarrow \quad x_b = x_a + \frac{1}{k}f$$

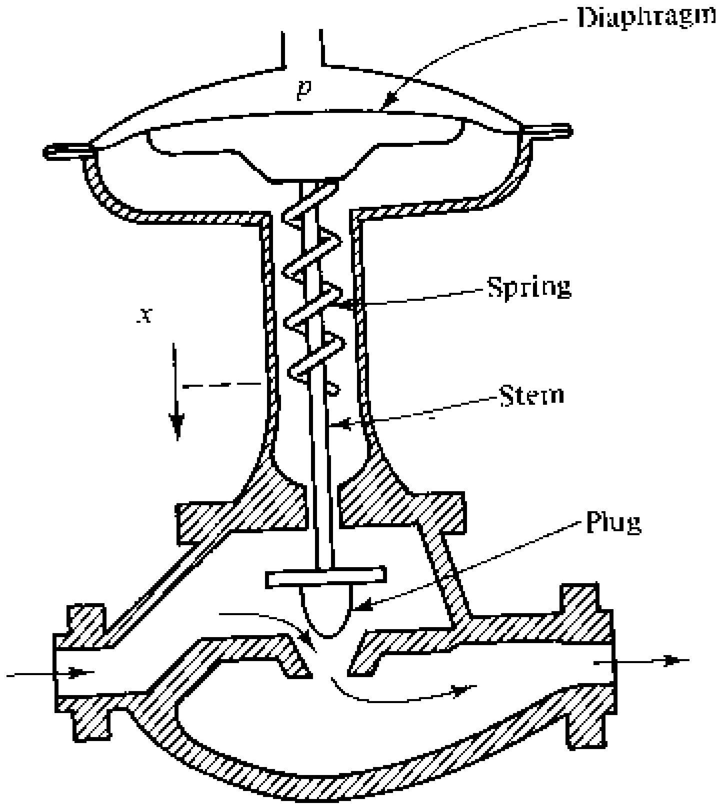
$$m\frac{d^2x_a}{dt^2} = f - \beta\frac{dx_a}{dt}$$



$$m_1 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = f - k_1 x_a - \beta_1 \frac{dx_a}{dt} - \beta_3 \left(\frac{dx_a}{dt} - \frac{dx_b}{dt} \right)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_b}{dt^2} = -k_2 x_b - \beta_2 \frac{dx_b}{dt} - \beta_3 \left(\frac{dx_b}{dt} - \frac{dx_a}{dt} \right)$$

Exemplo: Dinâmica de uma válvula pneumática de regulação



Fonte: HMA Group

Modelo do movimento do corpo da válvula

O ar na câmara da válvula exerce uma força dada pelo produto da área A do diafragma pela pressão do ar p.

m: massa do corpo da válvula (haste e obturador)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = pA - Kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

Normalmente a massa m é desprezável face às outras grandezas e o movimento pode aproximar-se pelo modelo de 1ª ordem:

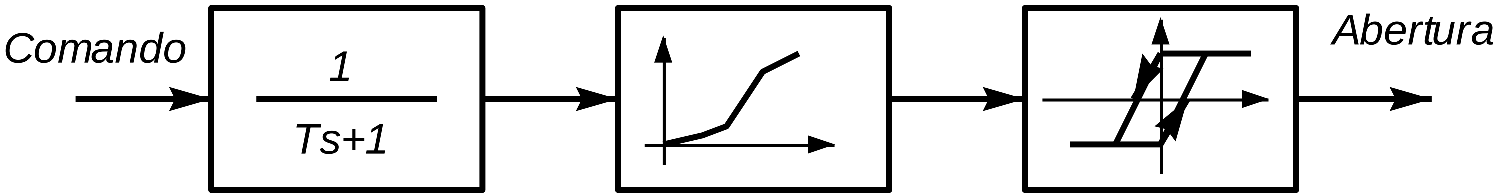
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K}{\beta}x + \frac{A}{\beta}p$$

As válvulas estão providas de um posicionador eletromecânico que usa um sinal elétrico para gerar a pressão de ar que garante a posição desejada para o obturador da válvula. O conjunto conversor válvula é concebido para que haja uma relação não linear entre o comando da válvula e a posição do obturador. Esta não linearidade é uma das características da válvula, sendo fornecida pelo fabricante.

A válvula pode ainda ter folgas mecânicas que fazem com que o seu movimento num sentido seja diferente do movimento em sentido oposto.

Os posicionadores elétricos das válvulas permitem uma maior precisão, sendo mais caros.

Modelo prático de uma válvula



Quer o comando, quer a abertura da válvula são expressos em unidades normalizadas de 0 a 100%.

Sistemas mecânicos de rotação

Os sistemas mecânicos de translação são muito comuns em aplicações de engenharia:

- Motores, Juntas de braço robot
- Caixas de desmultiplicação

Relacionam:

- Ângulo de rotação $[rad]$
- Velocidade angular $[rad/s]$ e aceleração angular $[rad/s^2]$
- Binário $[Nm]$

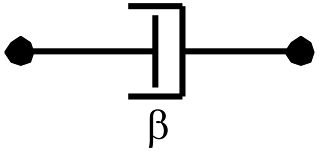
Momento de inércia

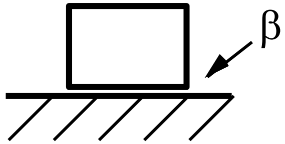
O momento de inércia é o análogo da massa para a rotação.

Quando um corpo em rotação com momento de inercia $J\ [Nms^2]$ é actuado por um binário $T\ [Nm]$, adquire uma aceleração angular dada por

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T$$

Atrito viscoso





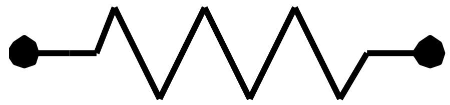
São os elementos que dissipam energia.

Quando existe uma diferença de velocidade de rotação entre os dois corpos o atrito corresponde a um binário que contraria o movimento e que depende da velocidade relativa $d\theta/dt$. No caso linear o binário é dado por:

$$T = \beta \frac{d\theta}{dt}$$

Poderíamos também considerar atrito estático e outras formas de atrito.

Molas elásticas



k

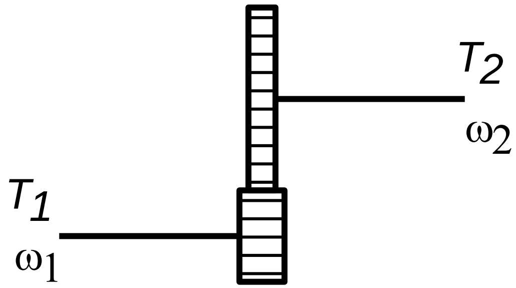
Elementos que armazenam energia potencial.

Quando a mola é desviada do ângulo θ em relação à posição de repouso, reage com um binário que se opõe ao movimento, dada para molas lineares por

$$T = k\theta$$

$k \quad [Nm/rad]$ é chamada "constante da mola".

Caixa de desmultiplicação



Uma caixa de desmultiplicação transforma o binário e a velocidade angular de acordo com as seguintes relações:

$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha}\omega_2 \qquad T_1 = \alpha T_2 \qquad T_1\omega_1 = T_2\omega_2$$

O parâmetro $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ é o inverso da razão de desmultiplicação da caixa.

Justificação das relações na caixa de desmultiplicação

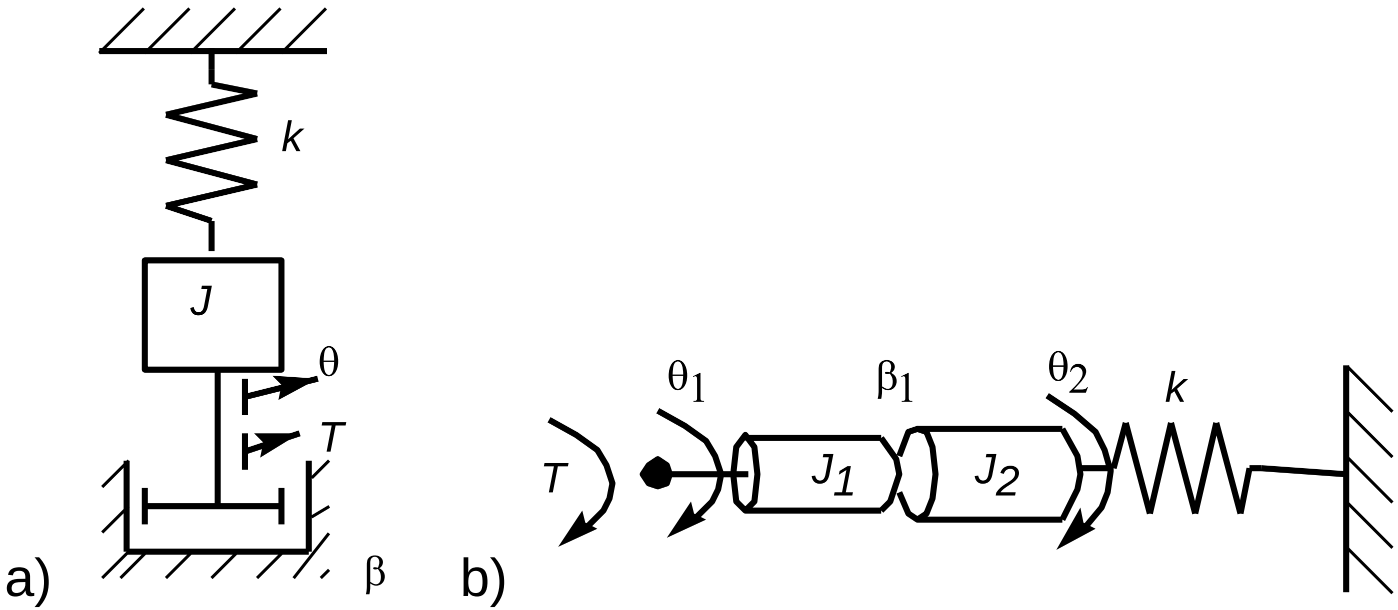
Potência na engrenagem 1: $P_1 = T_1\omega_1$

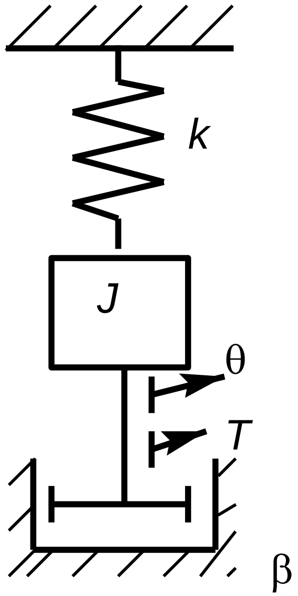
Potência na engrenagem 2: $P_2 = T_2\omega_2$

As potências são iguais: $T_1\omega_1 = T_2\omega_2$

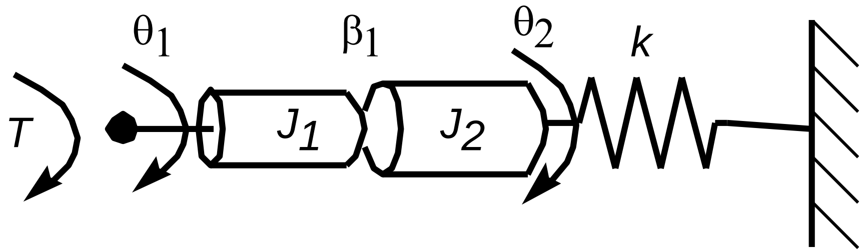
Relação de velocidades: $\omega_1 = \frac{1}{\alpha}\omega_2$ logo $T_1\frac{1}{\alpha}\omega_2 = T_2\omega_2$ ou seja $T_1 = \alpha T_2$

Exemplos





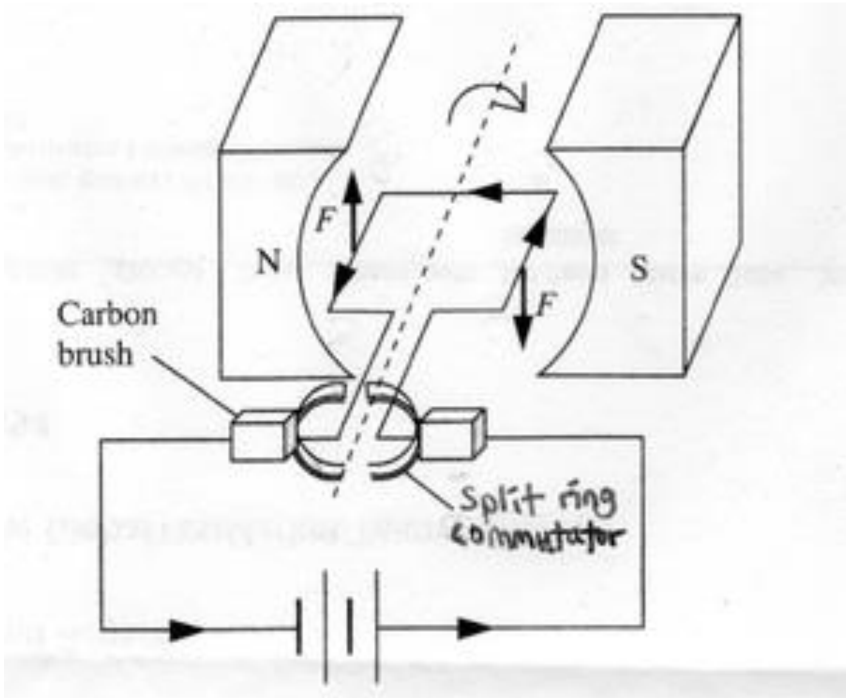
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - k\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}$$



$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T - \beta_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right)$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\beta_1 \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) - k\theta_2$$

Exemplo: Servomotor de corrente contínua de íman permanente



[JML-CEE2019] pp. 35, 36

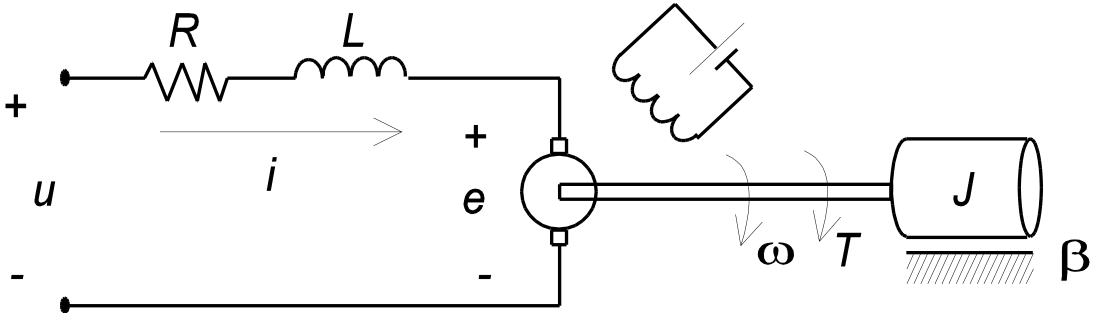
Um motor de corrente contínua tem essencialmente 2 partes:

- O **estator**, onde estão fixos enrolamentos ou ímanes permanentes (em pequenos motores) que criam um campo magnético radial;
- O **rotor**, ligado mecanicamente ao veio do motor, onde há bobinas longitudinais que, ao serem percorridas por uma corrente originam uma força tangencial que o faz girar. Por forma a que a corrente no rótor tenha sempre o mesmo sentido, as escovas (contactos deslizantes) tocam nas lâminas do coletor ligadas às bobinas do rotor.

Bibliografia:

Franklin, Powell e Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems.* Addison Wesley. Sec. 2.4

Modelo do servomotor CC de íman permanente



Binário do motor:

$$T(t) = K'\varphi(t)\ i(t)$$

Sendo o fluxo φ criado pelo circuito de campo constante,

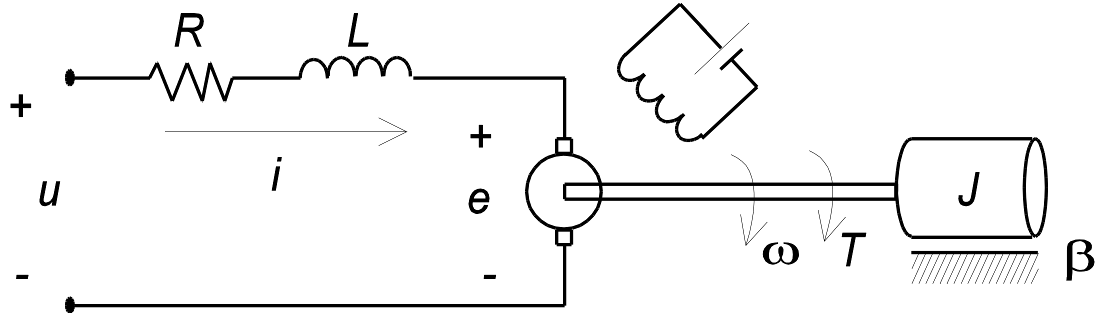
$$T(t) = Ki(t)$$

Tensão aos terminais do rótor

$$e = K_b\omega$$

Escreva as equações que modelam o:

- Circuito do rótor;
- Movimento do rótor em termos da velocidade;
- Modelo de estado, tomando como saída a velocidade angular e estado $x_1 = \omega$, $x_2 = i$;
- Simplifique as equações supondo que a indutância do circuito do rótor é desprezável, por forma a obter um modelo de 1ª ordem;
- Modelo de estado, tomando como saída a posição angular e estado $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, $x_3 = i$;



Circuito do rotor do motor:

$$L\frac{di}{dt} + R\ i + e = u \qquad e = K_b\omega \qquad L\frac{di}{dt} + R\ i + K_b\omega = u$$

Movimento do rotor do motor:

$$J\frac{d\omega}{dt} = T(t) - \beta\omega \qquad T(t) = Ki(t) \qquad J\frac{d\omega}{dt} = Ki(t) - \beta\omega$$

Tomem-se como variáveis de estado do motor:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix}$$

obtêm-se as equações de estado, tomando como saída a velocidade ω:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Se quisermos modelar a posição, necessitamos de uma variável de estado adicional (posição angular).

Modelo de estado tomando como saída a posição angular

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \omega,\ x_3 = i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Modelo de complexidade reduzida

$$L\frac{di}{dt} + R\ i + e = u \qquad J\frac{d\omega}{dt} = T(t) - \beta\omega \qquad T(t) = Ki(t) \qquad e = K_b\omega$$

Assume-se a indutância do rotor desprezável: $L \approx 0$

$$Ri + e = u \quad \rightarrow \quad i = \frac{u - e}{R} = \frac{u - K_b\omega}{R}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\beta}{J}\omega + \frac{K}{JR}(u - K_b\omega)$$

A tensão aplicada e a velocidade estão relacionadas pelo modelo simplificado:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{\beta}{J} + \frac{KK_b}{JR}\right)\omega + \frac{K}{JR}u$$

Modelo reduzido do motor (velocidade)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{\beta}{J} + \frac{KK_b}{JR}\right)\omega + \frac{K}{JR}u$$

A função de transferência entre a entrada u e a velocidade angular ω obtem-se tomando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$G(s) = \frac{G_0}{\tau s + 1}$$

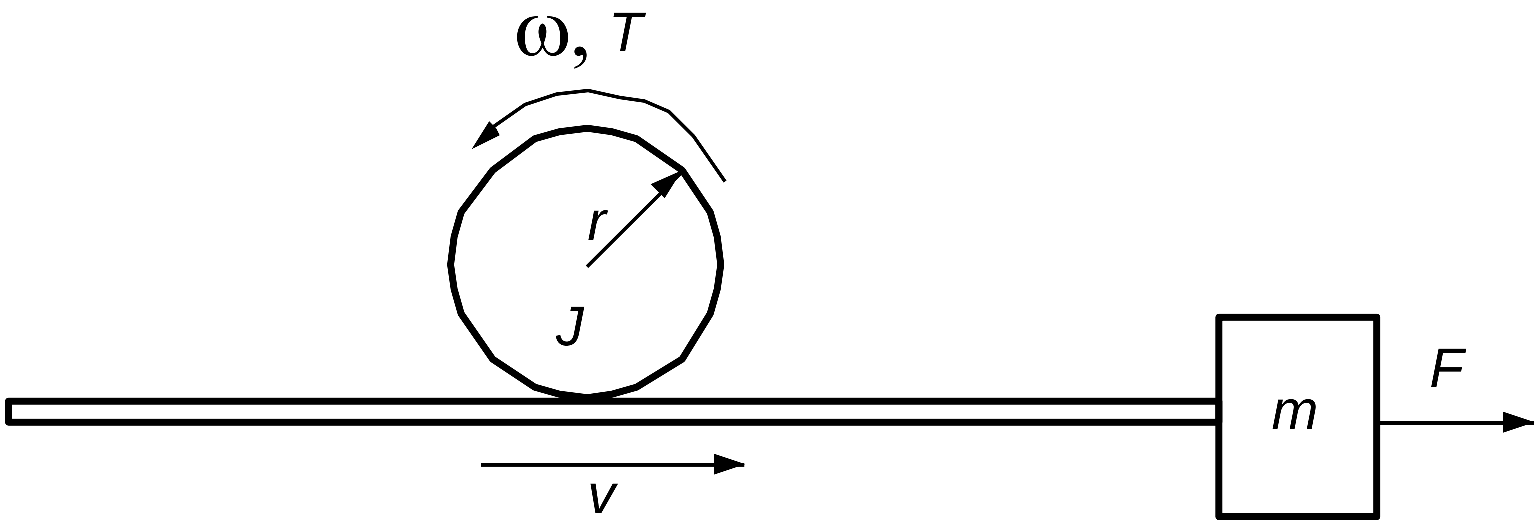
em que

$$G_0 = \frac{K}{\beta R + KK_b} \qquad \tau = \frac{JR}{\beta R + KK_b}$$

A relação entre a tensão aplicada a um motor de corrente contínua de íman permanente e a velocidade angular é um sistema de 1ª ordem.

Transformação da rotação em translação

Assume-se que não há escorregamento, nem perda de energia



$$v = r\omega, \qquad F = \frac{1}{r}T$$