Exame de Análise Numérica de Equações Diferenciais Parciais (MMA)
Instituto Superior Técnico, 29 de Junho de 2020, 11h30-14h30

1)$_{[3.0]}$ Dada uma função $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$ pretende-se uma aproximação do laplaciano da forma,

$$\Delta u(x,y) = a_0 u(x,y) + a_1 u(x+h,y+h) + a_2 u(x-h,y+h) + a_3 u(x+h,y-h) + a_4 u(x-h,y-h) + O(h^2),$$

(os nós estão dispostos em forma de quina).

a) Determine a_k para que a fórmula seja exacta pelo menos para polinómios $\mathbb{P}_2$.

b) Justifique que se obtém uma expressão similar, rodando em 45º a fórmula de diferenças centradas.

2)$_{[3.0]}$ Para $\mu > 0$, fixo, considere o problema de Dirichlet em $\Omega =]0,1[^2$

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \mu \partial_y^2 u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde se pretende encontrar um λ para o qual há uma solução u não nula.

a) Encontre uma solução da forma $u(x,y) = \sin(ax)\sin(by)$, indicando o λ correspondente.

b) Discretize o problema usando um único ponto interior $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e obtenha um valor $\tilde{\lambda}$ aproximado.

3)$_{[4.0]}$ Considere o problema de evolução

$$\begin{cases} \partial_t u + \beta u = \alpha \partial_x^2 u & \text{em }]0,1[\times]0,T[\\ u(x,0) = 4x(1-x) & \text{se } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{se } t \in [0,T] \end{cases}$$

onde T é o tempo final e $\alpha, \beta > 0$ são constantes.

a) Defina o esquema explícito, indicando também as condições iniciais e de fronteira.

b) Com $h_x = \dfrac{1}{2}$, $h_t = \dfrac{1}{M}$, aproxime o valor $u(\frac{1}{2}, 1)$.

c) Analise a estabilidade do esquema explícito, usando o critério de Von Neumann.

– Que valor de M deveria considerar na alínea b)?

4)$_{[3.0]}$ Considere o problema de Dirichlet em $\Omega =]-1,1[^2$, para $\lambda, \mu > 0$,

$$(P) \begin{cases} \lambda u - \partial_x^2 u - \mu \partial_y^2 u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

a) Apresente a formulação variacional associada ao problema (P).

b) Mostre que dado $f \in H^{-1}(\Omega)$ existe um e um só $u \in H_0^1(\Omega)$ que é solução de (P).

5)$_{[5.0]}$ Considere o problema anterior (P).

a) Seja $E = \bar{\Omega}$, o único elemento finito com funções de forma em $\mathbb{Q}_2$, com 9 nós, sendo apenas um deles interior. Apresente a função de forma dual do único nó interior, $(0,0)$.

b) Usando esse elemento finito, obtenha u_h aproximação da solução de (P), calculando os integrais exactos (excepto o que envolve f).

c) Considerando $f(x,y) = \exp(x+y^2), \lambda = \mu = 1$, calcule a expressão de u_h usando a regra de integração do ponto médio em 4 quadrados de Ω.

6)$_{[2.0]}$ O mesmo que em 5.a) mas considerando agora 3D, com $\Omega =]-1,1[^3$, havendo agora 27 nós para $\mathbb{Q}_2$, sendo ainda apenas interior o nó $(0,0)$.