Probabilidades e Estatística

LEE, LEGI, LENO, LETI, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMat, MEQ

1º semestre – 2018/2019
04/05/2019 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Considere que um trabalho científico é avaliado por 3 revisores que recomendam a sua rejeição (ou aceitação) de modo mutuamente independente. Admita que a probabilidade de o revisor recomendar a rejeição do trabalho é igual a 0.7, 0.75 e 0.8 para o 1º, 2º e 3º revisores, respetivamente.

(a) Determine a probabilidade de pelo menos um dos 3 revisores recomendar a rejeição do trabalho. (3.0)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$R_i = \{\text{revisor } i \text{ recomendar a rejeição do trabalho}\}$	$P(R_i) = \begin{cases} 0.7, & i=1 \\ 0.75, & i=2 \\ 0.8, & i=3 \end{cases}$

- **Probabilidade pedida**

Dado que os eventos R_1, R_2 e R_2 são mutuamente independentes, tem-se

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1) \times P(R_2) \\ P(R_1 \cap R_3) &= P(R_1) \times P(R_3) \\ P(R_2 \cap R_3) &= P(R_2) \times P(R_3) \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} P(R_1 \cup R_2 \cup R_3) &= P(R_1) + P(R_2) + P(R_3) - P(R_1 \cap R_2) - P(R_1 \cap R_3) - P(R_2 \cap R_3) \\ &\quad + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &= P(R_1) + P(R_2) + P(R_3) - P(R_1) \times P(R_2) - P(R_1) \times P(R_3) - P(R_2) \times P(R_3) \\ &\quad + P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3) \\ &= 0.7 + 0.75 + 0.8 - 0.7 \times 0.75 - 0.7 \times 0.8 - 0.75 \times 0.8 + 0.7 \times 0.75 \times 0.8 \\ &= 0.985. \end{aligned}$$

(b) Calcule a probabilidade de o 3º revisor recomendar a rejeição do trabalho sabendo que o 1º ou o 2º revisor recomendou a rejeição do mesmo. (2.0)

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P[R_3 \mid (R_1 \cup R_2)] &= \frac{P[R_3 \cap (R_1 \cup R_2)]}{P(R_1 \cup R_2)} \\ &= \frac{P[(R_3 \cap R_1) \cup (R_3 \cap R_2)]}{P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)} \\ &= \frac{P(R_1 \cap R_3) + P(R_2 \cap R_3) - P[(R_1 \cap R_3) \cap (R_2 \cap R_3)]}{P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)} \\ &= \frac{P(R_1 \cap R_3) + P(R_2 \cap R_3) - P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)} \\ &\overset{indep.mútua}{=} \frac{P(R_1) \times P(R_3) + P(R_2) \times P(R_3) - P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3)}{P(R_1) + P(R_2) - P(R_1) \times P(R_2)} \\ &= \frac{P(R_3) \times [P(R_1) + P(R_2) - P(R_1) \times P(R_2)]}{P(R_1) + P(R_2) - P(R_1) \times P(R_2)} \\ &= P(R_3) \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

[Alternativamente: ao admitir-se que R_1, R_2 e R_3 são eventos mutuamente independentes, R_3 e $(R_1 \cup R_2)$ são também eventos independentes, logo $P[R_3 \mid (R_1 \cup R_2)] = P(R_3) = 0.8$.]

2. O número de obstáculos que surgem durante a execução de um jogo eletrónico é uma variável aleatória X com função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-5.4}\, 5.4^{x-5}}{(x-5)!}, \quad x = 5, 6, 7, \ldots$$

(a) Qual é a probabilidade de X não exceder 9 ? (1.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = número de obstáculos que surgem durante a execução de um jogo eletrónico
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = \frac{e^{-5.4}\, 5.4^{x-5}}{(x-5)!}$, $x = 5, 6, 7, \ldots$
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(X \le 9) &= F_X(9) \\ &= \sum_{x=5}^{9} \frac{e^{-5.4}\, 5.4^{x-5}}{(x-5)!} \\ &= \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-5.4}\, 5.4^{x}}{x!} \\ &= F_{Poisson(5.4)}(4) \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 0.3733. \end{aligned}$$

(b) Determine o 1º quartil de X. (2.0)

- **1º quartil de X**
  Atente-se que $F_X(x) = \sum_{i=5}^{x} \frac{e^{-5.4}\, 5.4^{i-5}}{(i-5)!} = F_{Poisson(5.4)}(x-5)$, $x = 5, 6, 7, \ldots$, e represente-se o 1º quartil de X por ξ. Então

$$\begin{aligned} \xi \;:\; & 0.25 \le F_X(\xi) \le 0.25 + P(X = \xi) & (1) \\ & 0.25 \le F_X(\xi) \le 0.25 + [F_X(\xi) - F_X(\xi^-)] \\ & F_X(\xi^-) \le 0.25 \le F_X(\xi). & (2) \end{aligned}$$

Tirando partido da definição de 1º quartil em (**??**) e do facto de

$$\begin{aligned} 0.25 \le F_X(9) \overset{(a)}{=} 0.3733 \quad \le \quad & 0.25 + P(X = 9) = 0.25 + [F_X(9) - F_X(8)] \\ & = 0.25 + [F_{Poisson(5.4)}(9-5) - F_{Poisson(5.4)}(8-5)] \\ & \overset{tabela/calc.}{\simeq} 0.25 + (0.3733 - 0.2133) = 0.41, \end{aligned}$$

concluímos que $\xi = 9$. [A prova da sua unicidade é deixada como exercício.]
[Em alternativa, note-se que

$$F_X(8) = F_X(9^-) = F_{Poisson(5.4)}(8-5) \overset{tabela/calc.}{\simeq} 0.2133 \le 0.25 \le F_X(9) \overset{(a)}{=} 0.3733.$$

Logo o resultado (**??**) leva-nos a concluir que $\xi = 9$; a prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

(c) Admita que os números de obstáculos em diferentes execuções do jogo são variáveis independentes e identicamente distribuídas a X. Calcule a probabilidade de um jogador ter de executar o jogo mais de 10 vezes até encontrar a primeira execução com 5 obstáculos. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  Y = no. de execuções do jogo até surgir a primeira com 5 obstáculos
- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{Geométrica}(p)$, onde $p = P(X = 5) = e^{-5.4}$ [$\simeq 0.0045$].

- **F.p. de Y**
  $P(Y=y)=(1-p)^{y-1}\,p, \quad y=1,2,\ldots$

- **F.p. de Y**
$$\begin{aligned}
P(Y>10) &= 1-P(Y\le 10)\\
&= 1-\sum_{y=1}^{10}(1-p)^{y-1}\,p\\
&= 1-p\,\frac{1-(1-p)^{10}}{1-(1-p)}\\
&= (1-p)^{10}\\
&= \left(1-e^{-5.4}\right)^{10}\\
&\simeq 0.955741 \qquad [\simeq (1-0.0045)^{10}\simeq 0.955900].
\end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. O erro de quantização na digitalização de um valor de um sinal analógico é representado pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua com valor esperado nulo e variância igual a $\frac{1}{12}$.

(a) Identifique os parâmetros da distribuição de X e obtenha $E(|X|)$. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = erro de quantização cometido na digitalização de um valor de um sinal analógico

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Uniforme}(a,b)$, onde
$$(a,b)\ :\ \begin{cases}E(X)=0\\ V(X)=\frac{1}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a+b}{2}=0\\ \frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{12}\end{cases} \overset{a<b}{\Leftrightarrow} \begin{cases}b=-a\\ (-a-a)^2=1\end{cases} \overset{a<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}b=-a\\ 4a^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=-a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

- **F.d.p. de X**
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases} = \begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

- **Valor esperado de $|X|$**
$$\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f_X(x)\,dx\\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|\,dx\\
&\overset{|x|\,\text{é}\,f.\,par}{=} 2\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx\\
&= x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Admita que os erros de quantização cometidos na digitalização de 120 valores de um sinal analógico são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X. Determine um valor aproximado para a probabilidade de a média desses erros exceder 0.05. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = erro quant. cometido na digitaliz. do $i-$ésimo valor de um sinal analógico, $\quad i=1,\ldots,n$
  $n=120$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \dots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 0, \quad i = 1, \dots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{12}, \quad i = 1, \dots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = média erros quant. cometidos na digitaliz. de n valores do sinal analógico

- **Valor esperado e variância de $\bar{X}_n$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \stackrel{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} > 0.05) &= 1 - P(\bar{X} \leq 0.05) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0.05 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{0.05 - 0}{\frac{\sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{120}}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(1.90) \\
&\stackrel{tabela/calc}{=} 1 - 0.9713 \\
&= 0.0287.
\end{aligned}$$

2. Um quartel de bombeiros dispõe de dois veículos de socorro médico que requerem equipas de emergência para os operar. Considere que a variável aleatória X (respetivamente Y) representa o número de equipas de emergência disponíveis (respetivamente o número de veículos de socorro médico disponíveis) em qualquer instante. Admita que a função de probabilidade conjunta de X e Y é apresentada na tabela abaixo.

	Y		
X	0	1	2
0	0.10	0.15	0.01
1	0.05	0.25	0.02
2	0.02	0.10	0.30

(a) Calcule $P(X \geq 1 \mid Y \geq 1)$. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = número de equipas de emergência disponíveis
  Y = número de veículos de socorro disponíveis

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X = x, Y = y)$, $\quad P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) \quad$ e $\quad P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$
  encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y			$P(X=x)$
	0	1	2	
0	0.10	0.15	0.01	0.26
1	0.05	0.25	0.02	0.32
2	0.02	0.10	0.30	0.42
$P(Y=y)$	0.17	0.50	0.33	1

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1 \mid Y \geq 1) &= \frac{P(X \geq 1, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} \\
&= \frac{\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2} P(X=x, Y=y)}{\sum_{y=1}^{2} P(Y=y)} \\
&= \frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)}{P(Y=1)+P(Y=2)} \\
&= \frac{0.25+0.02+0.10+0.30}{0.50+0.33} \\
&= \frac{0.67}{0.83} \\
&\simeq 0.807229.
\end{aligned}$$

(b) Determine a correlação entre X e Y e averigúe se X e Y são variáveis dependentes. (3.5)

- **Correlação entre X e Y**
Uma vez que se pretende calcular

$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \times E(Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}},$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e marginais de X e Y calculadas em (a).

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x\, P(X=x) \\
&= 0 \times 0.26 + 1 \times 0.32 + 2 \times 0.42 \\
&= 1.16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \sum_{x=0}^{2} x^2\, P(X=x) - E^2(X) \\
&= \left(0^2 \times 0.26 + 1^2 \times 0.32 + 2^2 \times 0.42\right) - 1.16^2 \\
&= 2 - 1.16^2 \\
&= 0.6544
\end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de Y**

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{2} y\, P(Y=y) \\
&= 0 \times 0.17 + 1 \times 0.50 + 2 \times 0.33 \\
&= 1.16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \sum_{y=1}^{2} y^2\, P(Y=y) - E^2(Y) \\
&= \left(0^2 \times 0.17 + 1^2 \times 0.50 + 2^2 \times 0.33\right) - 1.16^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= 1.82 - 1.16^2 \\ &= 0.4744 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** XY

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x\,y\,P(X=x, Y=y) \\ &= 1\times 1\times 0.25 + 1\times 2\times 0.02 + 2\times 1\times 0.10 + 2\times 2\times 0.30 \\ &= 1.69 \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y) \\ &= 1.69 - 1.16\times 1.16 \\ &= 0.3444 \end{aligned}$$

- **Correlação entre** X **e** Y (cont.)

$$\begin{aligned} corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\ &= \frac{0.3444}{\sqrt{0.6544\times 0.4744}} \\ &\simeq 0.618115. \end{aligned}$$

- **Dependência entre** X **e** Y

  É sabido que: caso X e Y sejam v.a. independentes, então $corr(X,Y)=0$.
  Ora, $corr(X,Y)\simeq 0.618115 \neq 0$ logo X e Y são v.a. dependentes.

  [Alternativamente...
  X e Y são v.a. dependentes sse $P(X=x, Y=y) \neq P(X=x)\times P(Y=y)$, para algum $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
  Por um lado $P(X=0, Y=0) = 0.10$. Por outro lado $P(X=0)\times P(Y=0) = 0.26\times 0.17 = 0.0442$.
  Deste modo conclui-se que $P(X=0, Y=0) \neq P(X=0)\times P(Y=0)$, pelo que X e Y são v.a. dependentes.]