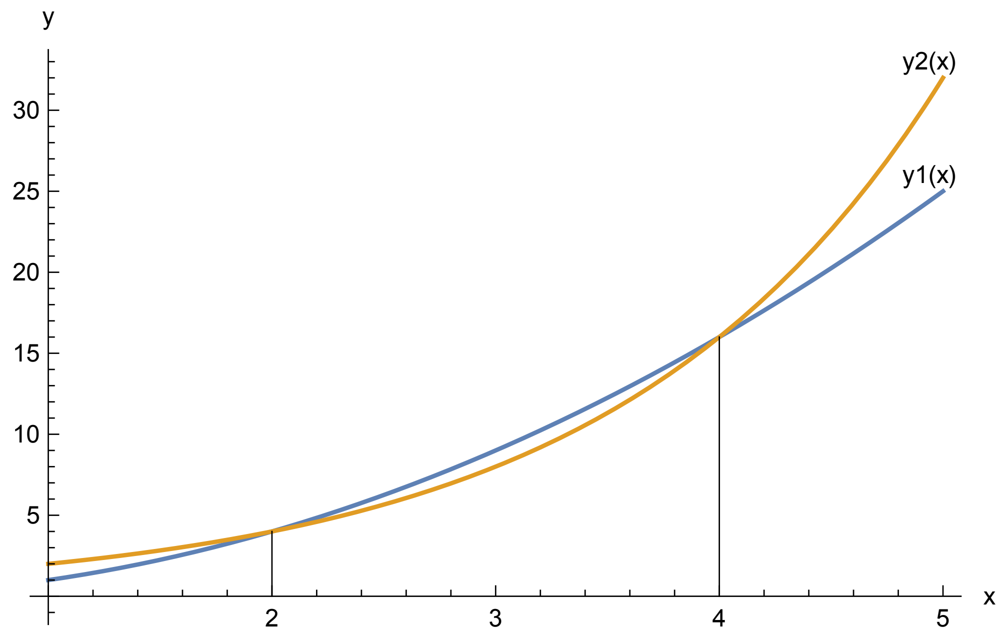

Figura 1: Gráficos das funções $y_2(x) = 2^x$ (amarelo) e $y_1(x) = x^2$ (azul) (caso particular do problema I com $a = 2$). A figura mostra que $\phi(2) = 4$.

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico – Lisboa

Projecto de Matemática Computacional
2º Semestre 2019/20

I

Considere duas curvas em $\mathbf{R}^2$: $y_1(x) = x^a$ e $y_2(x) = a^x$, com $a > 1$, $x > 1$. Sabe-se que estas curvas se intersectam no ponto $x = a$, já que $y_1(a) = y_2(a) = a^a$. Além disso, elas podem encontrar-se num segundo ponto, a que chamaremos $\phi(a)$. O caso de $a = 2$ é ilustrado pela Fig.1. O objectivo deste problema é aproximar numericamente $\phi(a)$, para qualquer $a > 1$.

1. Mostre que no caso de $a = e = \exp(1)$ as curvas $y_1(x) = x^a$ e $y_2(x) = a^x$ se intersectam num único ponto, enquanto que no caso de $a \neq e$, $a > 1$, se intersectam em dois pontos. *Sugestão: estude a função $f(x) = x^a - a^x$.*

2. Para cada valor a_i, tal que $a_i = 1 + i * 0.1$, $i = 1, 2, .., 17$, obtenha um valor aproximado de $\phi(a_i)$, com erro absoluto inferior a 0.01, usando o método da bissecção . Na escolha do intervalo onde aplicar o método da bissecção , tenha em conta os seguintes factos:

   - $\phi(a_1) = \phi(1.1) < 50$.

- Se $i > j$, então $\phi(a_i) < \phi(a_j)$.
- $\phi(a_i) > e$, $i = 1, 2, ..., 17$

Escreva uma tabela com todos os valores de $\phi(a_i)$ obtidos.

3. Para aproximar numericamente o valor de $\phi(a)$, com maior precisão, vamos agora utilizar o método do ponto fixo com a função iteradora

$$g(x) = x + \alpha(x^a - a^x), \tag{1}$$

onde α é um parâmetro real a determinar (dependente de a).

   (a) Supondo conhecido um valor aproximado de $\phi(a)$, e baseando-se na teoria sobre o método do ponto fixo, determine aproximadamente o valor de α para o qual a convergência do método iterativo é mais rápida.

   (b) Usando o método do ponto fixo, com a função iteradora (1), obtenha uma nova aproximação de $\phi(a_i)$, com erro absoluto inferior a 10^{-8}, para cada valor a_i considerado na pergunta 2.

   Ao escolher o valor de α, para cada a_i, baseie-se no critério deduzido na alínea anterior. Pode utilizar como aproximações iniciais os valores de $\phi(a_i)$ obtidos na pergunta 2.

   Componha uma tabela em que, para cada valor de i, apresente $\phi(a_i)$, valor de α utilizado e número de iterações do método realizadas.

II

Na segunda parte do trabalho, vamos aproximar a função $\phi(a)$, definida na primeira parte, em todo o intervalo $[e, 10]$.

1. Escreva uma tabela com todos os valores que conhece da funcao ϕ. Os valores de $\phi(a_i)$, com $a_i < e$, já foram determinados na primeira parte. Para determinar valores de $\phi(a_i)$, com $a_i > e$, baseie-se no facto de que se $\phi(a) = b$, então $\phi(b) = a$.

2. Utilizando como nós de interpolação todos os valores de $\phi(a_i)$, considerados na alínea anterior, tais que $e < a_i < 10$ (14 nós), construa o polinómio interpolador de ϕ e trace o seu gráfico no intervalo $[e, 10]$. Como explica o resultado obtido?

3. Vamos construir agora uma função interpoladora seccionalmente polinomial. Tais funções são chamadas splines. No nosso caso o spline define-se da seguinte maneira:

$$S(x) = \begin{cases} P(x), & \text{se} \quad x \in [e, 4]; \\ Q(x), & \text{se} \quad x \in [4, 10], \end{cases}$$

onde P é o polinómio interpolador nos pontos da tabela considerada que pertencem a $[e, 4]$; Q é o polinómio interpolador nos pontos da tabela considerada que pertencem a $[4, 10]$.Trace o gráfico de S.

4. Sendo $b_i = 3, 4, ..., 10$, calcule $S(b_i)$, onde S é o spline obtido na alínea anterior. Calcule $\phi(b_i)$, usando o método da bissecção , com erro absoluto inferior a 10^{-6}. Elabore uma tabela apresentando os valores de $S(b_i)$ e os respectivos erros absolutos (quando comparados com os valores de $\phi(b_i)$.)

5. Vamos agora utilizar o método dos mínimos quadrados para aproximar ϕ, com base na tabela de valores considerada na pergunta 2. Considere a função ajustadora

$$G(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3}. \tag{2}$$

Determine os alores de A, B, C, D segundo o critério dos mínimos quadrados, e trace o gráfico de G no intervalo $[e, 10]$.

6. Elabore uma tabela apresentando os valores de $G(b_i)$ e os respectivos erros absolutos (quando comparados com os valores de $\phi(b_i)$, ver pergunta 4). Compare a precisão das aproximações obtidas pelo spline S e pelo método dos mínimos quadrados.

7. Calcule uma aproximação do integral

$$\int_{1.1}^{2.7} \phi(x)dx,$$

utilizando a regra de Simpson e baseando-se nos valores de $\phi(a_i)$ obtidos na primeira parte. Considere $h = 0.1$ e $h = 0.2$ e compare os resultados obtidos.

8. Calcule uma aproximação do integral

$$\int_{e}^{10} \phi(x)dx,$$

utilizando a regra de Simpson com 21 nós. Para aproximar os valores de $\phi(x_i)$ considere i) o spline S obtido em 3; ii) a função G obtida em 5.