MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2020

MEEC – IST, TESTE N0.1 TIPO – V05

PROBLEMA No.1 [5 v] Análise de sistemas não lineares

Considere o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 cos(x)$$

P1.1 [1 v] Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (1) no intervalo

$$]-3\pi/2, +3\pi/2\,[$$

P1.2 [3 v] Trace ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de *x(t)* para os seguintes *4* valores iniciais de *x:*

$$x_0 = -3\pi/4, -\pi/4, +\pi/4, +3\pi/4$$

Para isso, calcule explicitamente o sinal de *dx(t)/dt, t≥0.* Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura àcerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio.

P1.3. **[1 v]** Confirme a conjectura àcerca das propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema em torno de cada um dos pontos.

Problema No. 2 [8 v] Modelação em espaço de estados. Relação entre descrições nos domínios do tempo e da frequência

A figura 1 ilustra o modelo físico simplificado de um rotor acoplado a um braço rígido que roda no plano vertical *X-Y*, em torno do eixo *Z*. O braço tem um único grau de liberdade e movimenta-se sob a acção da força externa F_m gerada pelo rotor, estando também sujeito à acção da gravidade e de uma "mola rotacional". O ângulo θ é medido em relação à horizontal do lugar.

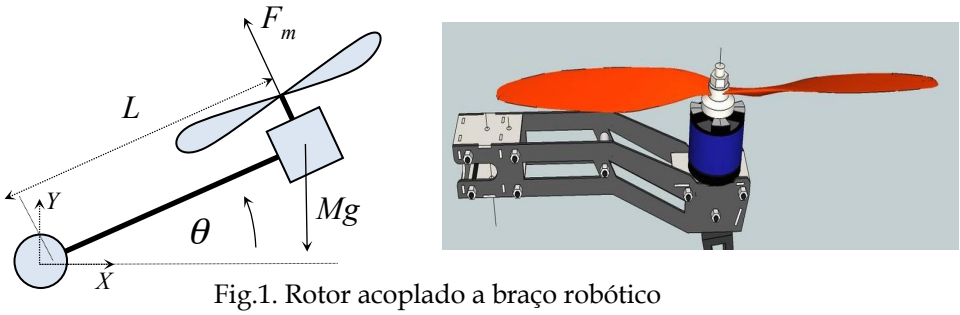

Fig.1. Rotor acoplado a braço robótico

P2.1 1 [1 v] ***Modelação.*** Mostre que a dinâmica do sistema com entrada F_m e saída θ é descrita pela equação diferencial

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta - MgL \times \cos(\theta) + LF_m$$

onde *J, M* e *L* são respectivamente o momento de inércia, a massa do rotor e o comprimento do braço, e $-K\theta$ é um binário de restituição associado à constante de mola *K* (despreza-se a massa do braço comparada com o valor da massa *M*). Os valores destes parâmetros são

$g=10\ m\ s^{-2}$; $J = 0.5\ Kg\ m^2$; $K = 2\ N\ m\ rad^{-1}$; $M = 1\ Kg$; $L = 0.5\ m$

Pretende-se controlar com grande precisão o sistema em torno do ponto de equilíbrio correspondente a $\theta_0 = \pi/6$.

P2.2 [1 v] ***Modelo em espaço de estados e cálculo das condições de equilíbrio***

Re-escreva o modelo do sistema determinado em **P2.1** utilizando a formulação em espaço de estados, isto é, escreva o modelo na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

onde

$$x = [\theta \ \ \dot{\theta}]^T; \ \ u = F; \ \ f : R^3 \to R^2$$

Calcule a força de equilíbrio $u=u_0$ correspondente ao ponto de equilíbrio

$$x_{1_0} = \theta_0; \ x_{2_0} = 0$$

(isto é, a calcule força necessária para manter o braço parado na posição angular θ_0).

P2.3 [3v] ***Sistema Linearizado***

Calcule a linearização do sistema total em torno do ponto de equilíbrio acima especificado, escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

com *A* e *B* a calcular, onde (para simplificar a notação) ***x_1, x_2 e u correspondem agora a pequenos desvios do vector de estado e da entrada*** em torno, respectivamente, de $[\pi/6, 0]^T$, *e* u_0. *Note que* $sen(\pi/6)=1/2$. ***Faça agora u=0 (sistema linearizado com entrada nula)***. Mostre, recorrendo ao cálculo dos valores próprios de *A*, que o sistema linearizado assim obtido é instável. A fim de comprovar esta afirmação calcule a função de transferência *G(s)* da entrada *u* para a saída x_1 e verifique que

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2-1}$$

onde $X_1(s)$ e $U(s)$ denotam respectivamente as transformadas de Laplace e $x_1(t)$ e $u(t)$. Verifique que os valores próprios de A são iguais aos polos de $G(s)$ e explique porquê.

P2.4 [1 v] ***Estabilização do sistema linearizado por retroacção de estado.***

Pretende-se regular o movimento do sistema descrito em **P2.3** de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para 0 a partir de qualquer estado inicial. Caso não tenha resolvido P2.3, faça

$$A = [0\ 1; 1\ 0]; \quad B = [0\ 1]^T$$

Propõe-se a lei de controlo por retroacção

$$u = -2x_1 - x_2$$

Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema em malha fechada.

P2.5 [2 v] Modifica-se agora o sistema de controlo de modo a estabilizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio genéricos $x_1=r$; $x_2=0$. Para isso, reformula-se a lei de retroacção de acordo com

$$u = r - 2x_1 - x_2$$

onde r denota uma referência arbitrária mas fixa de posição linear desejada. A partir do modelo em espaço de estados, calcule a função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

Comente acerca da capacidade do sistema em regular a variável x_1 para um valor desejado arbitrário.

PROBLEMA No. 3 [7 v] Análise em espaço de estados

Considere o sistema dinâmico descrito pelas equações em espaço de estados

$$\dot{x}_1 = -\frac{11}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2; \dot{x}_2 = \frac{9}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2$$

P3.1 [1v] Mostre, por análise dos valores próprios do sistema, que o ponto de equilíbrio 0 do sistema é instável.

P3.2 [5v] Para confirmar este resultado, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema (**normalize os vectores próprios de modo a terem o primeiro componente igual a 1**) , ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) ***trace aproximadamente trajectórias representativas no novo espaço de fase, utilizando o método das isoclinas***, e iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

P3.3 [1v] Calcule explicitamente a resposta do sistema dinâmico correspondente às condições iniciais $x_1(0)=1$ e $x_2(0)=-1$ utilizando a expressão geral da resposta em termos dos valores e vectores próprios do mesmo sistema.