MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2020

MEEC – IST, TESTE N0.1 TIPO – V04

PROBLEMA No.1 Análise de sistemas não lineares

Consider o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -xcos(x) \quad (1)$$

onde x é o estado.

P1.1 Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (1) no intervalo

$$]-3\pi/2, +3\pi/2[$$

P1.2 Trace ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de x(t), para as seguintes 4 valores iniciais de *x_0*:

$$x_0 = -3\pi/4, -\pi/4, +\pi/4, +3\pi/4$$

Para isso, calcule explicitamente o sinal de *dx(t)/dt, t≥0*. Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura àcerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio.

P1.3. Confirme a conjectura àcerca das propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema em torno de cada um dos pontos.

P1.4. Diga justificadamente se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: a trajectória correspondente ao estado inicial $x_0 = +\pi/4$ atinge o valor de equilíbrio *0* em tempo finito.

Problema No. 2 Modelação em espaço de estados. Relação entre descrições nos domínios do tempo e da frequência

Considere um "veículo robótico submarino" (ver Fig. 1) que se move na horizontal, actuado pela força *F* gerada por um sistema de propulsão.

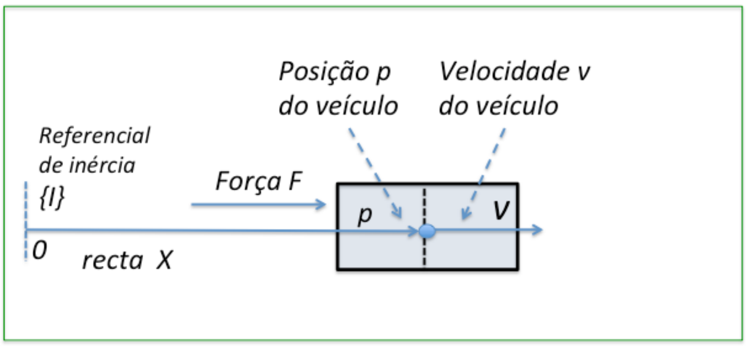

Fig. 1. Veículo submarino a movimentar-se ao longo da recta x.

O **veículo desloca-se com velocidade linear** v, e a sua **posição** $\boldsymbol{p}$ é medida em relação ao referencial de inércia *{I}* representado na Fig. 1, com origem em *0*. Pretende-se conduzir assimptoticamente a variável p (distância do veículo à origem do referencial *{I}*) para *0*, por acção da variável F.

No que se segue, consideram-se apenas pequenos desvios em relação ao **ponto de equilíbrio** correspondente à posição linear $p_0=0$, velocidade linear $v_0=0$, e entrada $F_0=0$.

P2.1 Deduza o sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem que descreve o sistema com entrada F e saída p (descrição utilizando o formalismo de espaço de estados). **Admita que o modelo dinâmico simplificado do veículo é dado por**

$$m\frac{dv}{dt} = -h(v) + F; h(0) = 0, \left.\frac{dh(v)}{dv}\right|_{0} = 10$$

com $m=1Kg$, onde h(v) capta o atrito hidrodinâmico, juntamente com a **parte cinemática** dada por

$$\frac{dp}{dt} = v$$

Calcule a linearização do sistema total em torno do ponto de equilíbrio acima especificado e mostre que ela se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -10x_2 + u$$

onde x_1, x_2 *e* u correspondem a pequenos desvios de p, v, e F respectivamente em torno de $p_0=0$, $v_0=0$, e $F_0=0$.

P2.2 Pretende-se regular o movimento do veículo robótico de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para *0* a partir de qualquer estado inicial. Para isso, propõe-se agora a lei de controlo por retroacção

$$u = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

com $k_1=40$ e $k_2=12$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema em malha fechada.

P2.3 Modifica-se agora o sistema de controlo de modo a estabilizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio genéricos $x_1=r$; $x_2=0$. Para isso, reformula-se a lei de retroacção de acordo com

$$u = k_1(r - x_1(t)) - k_2 x_2(t)$$

onde r denota uma referência arbitrária mas fixa de posição linear desejada. A partir do modelo em espaço de estados, calcule a função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

Verifique que os polos em malha fechada são iguais aos valores próprios determinados em P4.3. Comente acerca da capacidade do sistema em regular a variável x_1 para um valor desejado arbitrário.

PROBLEMA No. 3 Análise em espaço de estados

Considere o sistema dinâmico descrito pelas equações em espaço de estados

$$\dot{x}_1 = -x_2; \dot{x}_2 = -x_1$$

P3.1 Mostre, por análise dos valores próprios do sistema, que o ponto de equilíbrio *0* do sistema é instável.

P3.2 Para confirmar este resultado, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) ***trace aproximadamente trajectórias representativas no novo espaço de fase, utilizando o método das isoclinas***, e iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

P3.3 Calcule explicitamente a resposta do sistema dinâmico correspondente às condições iniciais $x_1(0)=1$ e $x_2(0)=1$ utilizando a expressão geral da resposta em termos dos valores e vectores próprios do mesmo sistema.