MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2020

MEEC – IST, TESTE N0.1 TIPO – V03

PROBLEMA No.1 Análise de sistemas não lineares

Consider o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + u \qquad (1)$$

onde x é o estado e u é a entrada.

P1.1 Suponha que $u=0$. Mostre que o ponto de equilíbrio *0* é instável. Para isso, calcule explicitamente o sinal de $dx(t)/dt$ e ***trace de modo aproximado*** as trajectórias do sistema com valores iniciais $x(0)$: *-2, +2.*

P1.2 Numa tentativa de estabilizar (pelo menos localmente) o ponto de equilíbrio *0*, propõe-se a lei de controlo

$$u = -kx; \;\; k > 0$$

Considere o sistema em malha fechada, isto é, o sistema descrito por

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - k)$$

Calcule os respectivos pontos de equilíbrio (*0* é um deles). Trace ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de $x(t)$, para as seguintes *4* valores iniciais de $x(0)$: $-2k^{1/2}$, $-0.5\,k^{1/2}$, $0.5\,k^{1/2}$, *e* $2k^{1/2}$. Para isso, calcule explicitamente o sinal de $dx(t)/dt$. Com base nesta informação, **investigue a estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio**. Em particular, prove que o ponto de equilíbrio *0* se tornou estável, e calcule a sua "bacia de atracção", isto é, o conjunto de valores iniciais que conduzem a trajectórias que convergem para 0. Mostre também de modo claro que o "tamanho" da bacia de atracção aumenta com o aumento de k, mostrando assim o efeito benéfico deste parâmetro de ajuste.

P1.3 Confirme os resultados do estudo de estabilidade dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema em torno de cada um desses pontos.

Problema No. 2 Modelação em espaço de estados

Na figura 1 representam-se duas plataformas espaciais que se deslocam ao longo da coordenada z. As plataformas, denominadas *P1* e *P2*, movimentam-se sob a acção das forças de propulsão F_1 e F_2. A plataforma *P1* desempenha o papel de "master"e a sua posição ao longo da coordenada $\underline{z}$ é indicada por z_1. A plataforma *P2*, com coordenada de posição z_2, desempenha o papel de "slave". A sua missão é seguir o movimento de *P1* e **levar a distância $d=z_1-z_2$ a convergir para um valor desejado *r* constante**, por manipulação adequada da força F_2. Para o efeito, a plataforma *P1* transmite para *P2* as seguintes variáveis: F_1, z_1, e dz_1/dt. A plataforma *P2* tem naturalmente acesso a z_2 e dz_2/dt. Para simplificar, assume-se que as massas das duas plataformas são iguais a *1kg*.

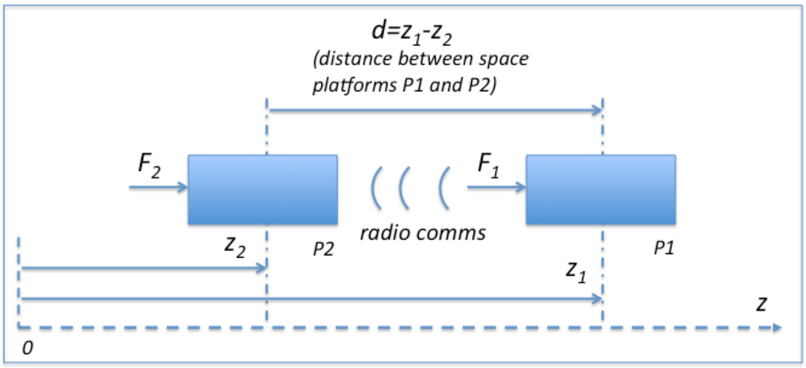

Fig. 1 Sistema com duas platformas espaciais: P1-"leader"; P2-"slave".
Objectivo: manter a distância $d=z_1-z_2$ entre os veículos igual a um valor desejado constante r, ou seja, conduzir o erro de seguimento $e=d-r= z_1-z_2-r$ para 0.

Para a tarefa proposta propõe-se a lei de coordenação

$$F_2 = F_1 + k_1(z_1 - z_2 - r) + k_2\left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt}\right);\ k_1,\ k_2 > 0$$

Q2.1 O primeiro passo na análise do desempenho do sistema conjunto – com a lei de coordenação indicada - em que a platforma P2 "segue" a plataforma P1, consiste em exprimir a dinâmica do sistema total recorrendo à formulação em espaço de estados. Nesse sentido, escreva sob a forma de equações de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ \ y = Cx$$

(com estado x, entrada u, e saída y) a evolução do sistema, adoptando as seguintes variáveis de estado:

$$x_1 = z_1;\ x_2 = \frac{dz_1}{dt};\ x_3 = e = z_1 - z_2 - r;\ x_4 = \frac{de}{dt} = \frac{d(z_1 - z_2)}{dt};\ u = F_1;\ y = e$$

Note que de acordo com a lei de Netwon-Euler, ***$F_1=d^2z_1/dt^2$ e $F_2=d^2z_2/dt^2$.***

Q2.2 Note que para o estudo da evolução do erro *e* basta prestar atenção às duas últimas equações de estado. Mostre que com r constante o erro $e=x_3$ tende de facto para *0*.

Problema No. 3 Relação entre funções de transferência e equações de estado]

Considere o sistema escalar com entrada *u* e saída *y*, com a função de transferência

$$G_1(s)= Y(s)/U(s)=1/[s^3(s+1)] \qquad (2)$$

P3.1 Escreva, na forma matricial, uma realização em espaço de estados do sistema com dimensão igual a 4.

P3.2 Idem, para o sistema com função de transferência

$$G_2(s)= Y(s)/U(s)=(s^2+s+1)/[s^3(s+1)] \qquad (3)$$

Para a realização obtida, apresente um diagrama de blocos com *4* integradores que ilustre como se simula o sistema no ambiente Simulink.

P3.3 É sabido que dada uma função de transferência G(s), existe um número infinito de realizações (em espaço de estados) possíveis. Dê um exemplo de uma realização de $G_1(s)$ diferente da que obteve em P3.1, com dimensão superior a *4*. Diga justificadamente se é possível obter uma realização com dimensão *3*.

PROBLEMA No. 4 Análise em espaço de estados

Considere um "veículo robótico submarino" (ver Fig. 2) que se move na horizontal, actuado pela força *F* gerada por um sistema de propulsão.

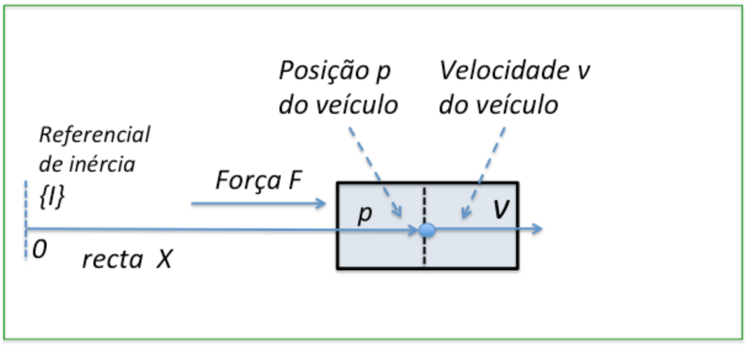

Fig. 2. Veículo submarino a movimentar-se ao longo da recta X.

O **veículo desloca-se com velocidade linear** v, e a sua **posição** $\boldsymbol{p}$ é medida em relação ao referencial de inércia *{I}* representado na Fig. 2, com origem em *0*. Pretende-se conduzir assimptoticamente a variável *p* (distância do veículo à origem do referencial *{I}*) para *0*, por acção da variável *F*.

No que se segue, consideram-se apenas pequenos desvios em relação ao **ponto de equilíbrio** correspondente à posição linear $p_0=0$, velocidade linear $v_0=0$, e entrada $F_0=0$.

P4.1 Derive a equação diferencial não linear de segunda ordem que descreve o sistema com entrada *F* e saída *p* e deduza uma realização correspondente em espaço de estados. **Admita o modelo dinâmico simplificado do veículo (com atrito hidrodinâmico quadrático) dado por**

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v\,|\,v\,|+F$$

com m=$1Kg$, β=$1N/m^2$, juntamente com a **parte cinemática** dada por

$$\frac{dp}{dt} = v$$

Calcule a linearização do sistema total em torno do ponto de equilíbrio acima especificado e mostre que ela se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;\;\; \frac{dx_2}{dt} = +u \qquad (4)$$

onde x_1, x_2 *e* u correspondem a pequenos desvios de p, v, e F respectivamente em torno de $p_0=0$, $v_0=0$, e $F_0=0$. ***Atenção: tenha cuidado ao calcular a derivada de $\beta v|v|$ em ordem a v no ponto v= v_0=0 ; é conveniente fazer o traçado da função.***

P4.2 Pretende-se regular o movimento do veículo robótico de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para *0* a partir de qualquer estado inicial. Mostre que este objectivo não é atingível em malha aberta, ou seja, com ***u*=0 em (4)**. Para isso, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema (4) no plano de fase (x_1, x_2) e tire conclusões. ***Atenção: não tente resolver esta alínea utilizando a técnica de diagonalização de sistemas!*** Basta examinar com cuidado as expressões extremamente simples para dx_1/dt e dx_2/dt em (4).

P4.3 A fim de ultrapassar a dificuldade enunciada em P4.2, propõe-se agora uma lei de controlo por retroacção

$$u = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

com $k_1=10$ e $k_2=11$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema em malha fechada.

P4.4 Suponha agora que se fez um erro na implementação da lei de controlo, e que $k_1=-1$, $k_2=0$. Mostre que este erro tem um efeito catastrófico, dado que o sistema em malha fechada se torna instável, com valores próprios *-1* e *+1*. Para confirmar e reforçar este resultado, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) trace trajectórias representativas no novo espaço de fase, iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.