MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2020

MEEC – IST, TESTE N0.1 TIPO – V02

Problema No.1 Análise de Sistemas Não Lineares

Consider o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1) + u \qquad (1)$$

onde u é um "parâmetro de controlo" real e constante, mas arbitrário.

P1.1 **Seja *u=0***. Calcule os pontos de equilíbrio do sistema definido por (1).

P1.2 **Ainda com *u=0*** trace, ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de x(t), para as seguintes condições iniciais de *x(0): -2, 0.5, e* +2. Para isso, calcule explicitamente os sinais de $dx(t)/dt$ e $d^2x(t)/dt^2$, $t \geq 0$. Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura àcerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio.

P1.3. Confirme a conjectura àcerca das propriedades de estabilidade local dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema (1) em torno de cada um desses pontos.

P1.4. Suponha agora que o parâmetro de controlo ***u* é diferente de *0*.** Calcule o intervalo de valores de u para os quais os novos pontos de equilíbrio são reais e distintos e calcule os pontos de equilíbrio correspondentes em função de u. Discuta as propriedades de estabilidade local dos pontos de equilíbrio resultantes.

Problema No. 2 Modelação em Espaço de Estados

A figura 1 representa um sistema para medir a aceleração de uma plataforma em movimento, que está na base de todos os sistemas sofisticados de navegação inercial para aeronaves, naves espaciais, e veículos robóticos aéreos, terrestres, e marinhos. O sistema consiste num corpo com massa m, livre de se deslocar mas ligado à "caixa" do acelerómeto por um conjunto mola+amortecedor, caracterizado respectivamente pelos coeficientes k e β. A variável x representa o desvio da posição da massa m em relação à posição que ocupa na "caixa" quando esta tem aceleração 0. O sistema tem um sensor de deslocamento, que mede este desvio.

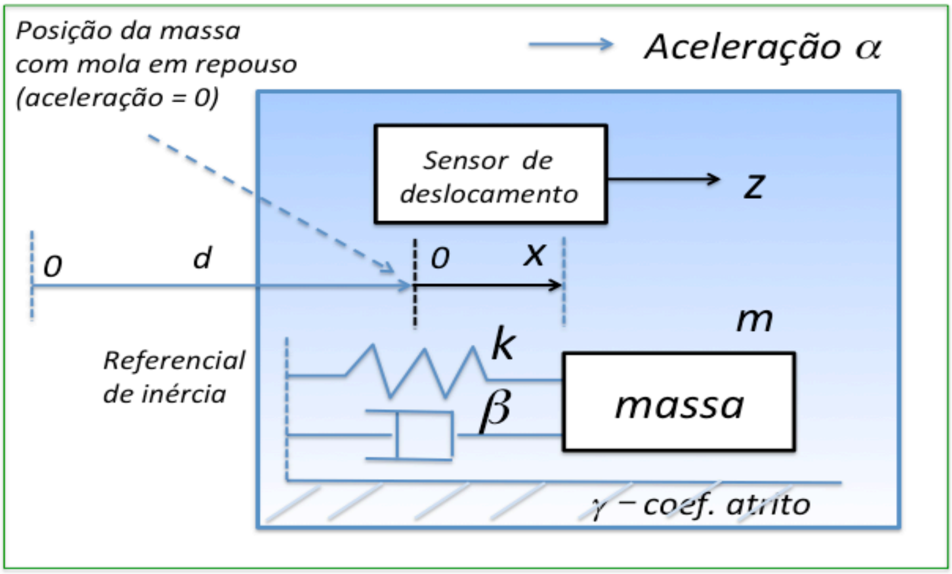

Fig. 1 Acelerómetro. Na figura, o símbolo 0 denota quer a origem do referencial de inércia (fora da caixa) quer o ponto (dentro da caixa) a partir do qual se mede o desvio x da massa m em relação ao repouso (aceleração 0).

P2.1 Seja d a posição do ponto de referência da "caixa" em relação a um referencial inercial, deslocando-se este ponto com aceleração $\alpha(t)$. Aplicando as leis de Newton na massa deduza a equação diferencial que relaciona a variável de deslocamento x com α. Como se alteraria a sua resposta se a massa se movesse com atrito no fundo da "caixa", com coeficiente de atrito γ?

P.2.2 A dinâmica do sensor de deslocamento (com entrada x e saída z) é dada por

$$\frac{dz}{dt} = -10z(t) - 10x(t)$$

Com base no resultado obtido em P2.1 e a dinâmica do sensor, escreva na forma matricial as equações do modelo de estado do sistema em que a entrada é a aceleração da "caixa" e a saída é a medida z dada pelo sensor de deslocamento. Adopte a seguinte escolha de variáveis de estado:

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T: x_1 = x,\ x_2 = dx/dt,\ x_3 = z.$$

Adopte como vector de saída $y = z = x_3$.

P2.3 Suponha que a "caixa" está animada de uma aceleração constante $\alpha(t) = \alpha^* ms^{-2}$, $t \geq 0$, com α^* fixo mas arbitrário. Com base no modelo de estado derivado em P2.2, mostre que o limite de $z(t)$ quando t tende para infinito é finito e proporcional a α^*. Calcule a constante de proporcionalidade em função dos parâmetros m, k, e β. Comente a utilidade do sistema como instrumento para medir a aceleração de um corpo sem recurso a ajudas externas.

Problema No. 3 Relação entre Descrições de Sistemas nos Domínios da Frequência e em Espaço de Estados.

Considere o sistema escalar com entrada u e saída y, com a função de transferência

$$G_1(s)= Y(s)/U(s)=1/[s^3(s+1)] \qquad (2)$$

P3.1 Escreva, na forma matricial, uma realização em espaço de estados do sistema com dimensão igual a 4.

P3.2 Idem, para o sistema com função de transferência

$$G_2(s)= Y(s)/U(s)=(s^2+s+1)/[s^3(s+1)] \qquad (3)$$

Para a realização obtida, apresente um diagrama de blocos com quatro integradores que ilustre como se simula o sistema no ambiente Simulink.

P3.3 É sabido que dada uma função de transferência G(s), existe um número infinito de realizações (em espaço de estados) possíveis. Dê um exemplo de uma realização de $G_1(s)$ diferente da que obteve em P3.1, com dimensão igual a 5.

Problema No.4 Linearização e Análise de Sistemas em Espaço de Estados

Considere um "veículo robótico submarino" (ver Fig. 2) que se move na horizontal, actuado pela força F gerada por um sistema de propulsão.

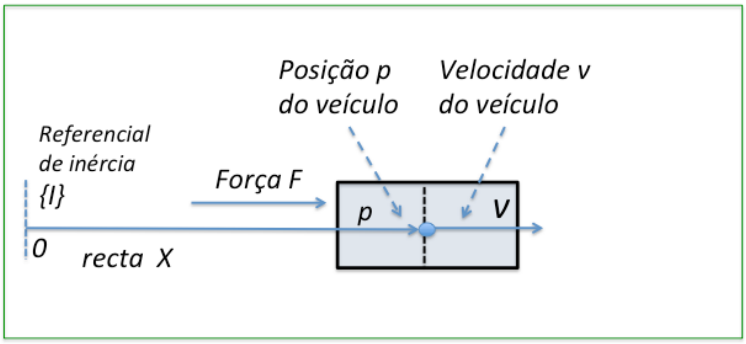

Fig. 2. Veículo submarino a movimentar-se ao longo da recta X.

O **veículo desloca-se com velocidade linear** v, e a sua **posição** p é medida em relação ao referencial de inércia *{I}* representado na Fig. 2, com origem em 0. Pretende-se conduzir assimptoticamente a variável p (distância do veículo à origem do referencial *{I}*) para 0, por acção da variável F.

No que se segue, consideram-se apenas pequenos desvios em relação ao **ponto de equilíbrio** correspondente à posição linear $p_0=0$, velocidade linear $v_0=0$, e entrada $F_0=0$.

P4.1 Derive a equação diferencial não linear de segunda ordem que descreve o sistema com entrada F e saída p e deduza uma realização correspondente em espaço de estados. **Admita o modelo dinâmico simplificado do veículo (com atrito hidrodinâmico quadrático) dado por**

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v\,|\,v\,| - v + F$$

com $m=1Kg$, $\beta=1N/m^2$, juntamente com a **parte cinemática** dada por

$$\frac{dp}{dt} = v$$

Calcule a linearização do sistema total em torno do ponto de equilíbrio acima especificado e mostre que ela se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u \qquad (4)$$

onde x_1, x_2 *e* u correspondem a pequenos desvios de *p, v,* e *F* respectivamente em torno de $p_0=0$, $v_0=0$, e $F_0=0$. ***Atenção: tenha cuidado ao calcular a derivada de*** $\boldsymbol{\beta v|v|}$ ***em ordem a v no ponto*** $\boldsymbol{v= v_0=0}$***; é conveniente fazer o traçado da função.***

P4.2 Pretende-se regular o movimento do veículo robótico de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para 0. Mostre que este objectivo não é atingível em malha aberta, ou seja, com $\boldsymbol{u=0}$ **em (4)**. Para isso, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema (4) no plano de fase (x_1, x_2) e tire conclusões. ***Atenção: não tente resolver esta alínea utilizando a técnica de diagonalização de sistemas!*** Basta examinar com cuidado as expressões extremamente simples para dx_1/dt e dx_2/dt em (4).

P4.3 A fim de ultrapassar a dificuldade enunciada em P4.2, propõe-se agora uma lei de controlo por retroacção

$$u = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

com $k_1=10$ e $k_2=10$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema de controlo em malha fechada.

P4.4 Para confirmar o resultado obtido em P4.3 trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) trace trajectórias representativas no novo espaço de fases, iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

P4.5 Modifica-se agora o sistema de controlo de modo a estabilizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio genéricos $x_1=r$; $x_2=0$. Para isso, reformula-se a lei de retroacção de acordo com

$$u = k_1(r - x_1(t)) - k_2 x_2(t)$$

onde *r* denota uma referência arbitrária mas fixa de posição linear desejada. A partir do modelo em espaço de estados, calcule a função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

Verifique que os polos em malha fechada são iguais aos valores próprios determinados em P4.3. Comente acerca da capacidade do sistema em regular a variável x_1 para um valor desejado arbitrário.